



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **GRAĐEVINARSTVO**

Modul: **PŽA, HVE, MTI**

Godina/Semestar: **III godina / V semestar**

Naziv predmeta (šifra): **Betonske konstrukcije 1**

Nastavnik: **Jelena Dragaš**

Naslov predavanja: **Dvojno armiranje. T presek. Moment loma.**

Datum : 28.10.2022.

Beograd, 2021.

Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022. i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.

Zadatak 10

Odrediti **potrebnu površinu armature** za presek poznatih dimenzija, pravougaonog oblika, opterećen graničnim uticajima M_{Ed} i N_{Ed} . Podaci za proračun:

$$\begin{array}{lll} M_{Ed} = 500 \text{ kNm} & b = 40 \text{ cm} & \text{C25/30} \\ N_{Ed} = \mathbf{700} \text{ kN} & h = 60 \text{ cm} & \text{B500 B XC3} \end{array}$$

$$\text{C25/30} \longrightarrow f_{cd} = 0.85 \cdot 25 / 1.5 = 14.2 \text{ MPa} = 1.42 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{B500 B} \longrightarrow f_{yd} = 500 / 1.15 = 435 \text{ MPa} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$$

Zadatak 10

1. $M_{Ed}=500$ kNm $N_{Ed}=700$ kN (*pritisak*)

2. pretp. $d_1 = 7$ cm

$$d = h - d_1 = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$$

$$M_{Eds} = M_{Ed} + N_{Ed} \left(\frac{h}{2} - d_1 \right) = 500 + 700 \cdot \left(\frac{0.6}{2} - 0.07 \right) = 661 \text{ kNm}$$

3. Računa se:

$$k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Eds}}{b \cdot f_{cd}}}} = \frac{53}{\sqrt{\frac{661 \cdot 10^2}{40 \cdot 1.42}}} = 1.554$$

Zadatak 10

ε_c (‰)	ε_{s1} (‰)	ξ	ζ	ω_1 (%)	κ	μ
3.50	2.00	0.636	0.735	51.515	1.625	0.379
3.50	1.95	0.642	0.733	51.988	1.620	0.381
3.50	1.90	0.648	0.730	52.469	1.615	0.383

4. $\varepsilon_{s1} = 1.9\text{‰} < 2.5\text{‰}$



Dvojno armiranje

SLOŽENO savijanje - DVOJNO ARMIRANJE

1. Sračunavaju se granični računski statički uticaji za odgovarajuće **proračunske situacije**

Stalne i prolazne proračunske situacije

$$M_{Ed} = \gamma_G \cdot M_{G,k} + \gamma_{Q,1} \cdot M_{Qk,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} \cdot M_{Qk,i}$$

$$N_{Ed} = \gamma_G \cdot N_{G,k} + \gamma_{Qk,1} \cdot N_{Qk,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Qk,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot N_{Qk,i}$$

2. Pretpostavlja se položaj težišta zategnute armature **d₁** i na osnovu toga sračunava suma momenata spoljašnjih sila oko težišta zategnute armature:

$$M_{Eds} = M_{Ed} + N_{Ed} \left(\frac{h}{2} - d_1 \right)$$

Sila **ZATEZANJA** se unosi sa **NEGATIVNIM** znakom

SLOŽENO savijanje - DVOJNO ARMIRANJE

3. Sračunava se koeficijent k :

$$k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Eds}}{b \cdot f_{cd}}}}$$



pročitaju (sračunaju)
dilatacije $\varepsilon_c, \varepsilon_{s1}$

Ako je $\varepsilon_{s1} < 2.5\text{‰}$ (ili f_{yd}/E_s), presek se **OBOSTRANO** armira

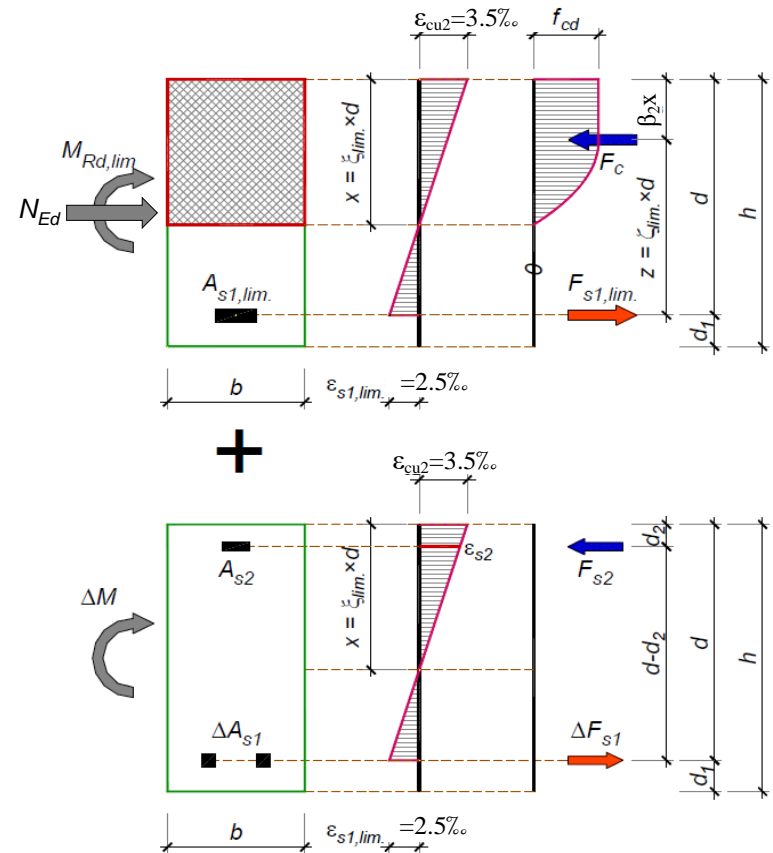
4. Određuje se **MOMENT NOSIVOSTI JEDNOSTRANO ARMIRANOG PRESEKA**, sa procentom armiranja $\omega_{Rd,lim}$ i koeficijentom k_{lim} koji odgovaraju dilataciji armature od $\varepsilon_{s1,lim} = 2.5\text{‰}$

$$M_{Rd,lim} = \left(\frac{d}{k_{lim}} \right)^2 b f_{cd}$$

SLOŽENO savijanje - DVOJNO ARMIRANJE

Preostali deo spoljašnjeg momenta savijanja se prihvata dodatnom zategnutom i pritisnutom armaturom.

$$\Delta M = M_{Eds} - M_{Rd,lim}$$



SLOŽENO savijanje - DVOJNO ARMIRANJE

Preostali deo spoljašnjeg momenta savijanja se prihvata dodatnom zategnutom i pritisnutom armaturom.

$$\Delta M = M_{Eds} - M_{Rd,lim}$$

5. Pretpostavlja se položaj težišta pritisnute armature d_2 i određuju se površine zategnute i pritisnute armature u preseku, iz izraza:

$$A_{s2} = \frac{F_{s2}}{\sigma_{s2}} = \frac{\Delta M}{(d - d_2)\sigma_{s2}}$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\xi_{lim} - \frac{d_2}{d}}{\xi_{lim}} \varepsilon_{cu2} \rightarrow \sigma_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} \leq f_{yd}$$

SLOŽENO savijanje - DVOJNO ARMIRANJE

$$F_{s2} = \Delta F_{s1} = \frac{\Delta M}{d - d_2} \quad \Delta A_{s1} = \frac{\Delta F_{s1}}{\sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{(d - d_2) f_{yd}}$$

$$A_{s1} = A_{s1, \text{lim}} + \Delta A_{s1}$$

$$A_{s1} = \omega_{1, \text{lim}} b d \frac{f_{cd}}{f_{yd}} - \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} + \frac{\Delta M}{(d - d_2) f_{yd}}$$

6. **Usvaja se broj i prečnik šipki armature.** Usvojena armatura se raspoređuje u preseku (a, čisto rastojanje između šipki)
7. **Sračunava se položaj težišta d_1** usvojene armature i statička visina d i upoređuje sa pretpostavljenom.
 - U slučaju znatnijih odstupanja, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću d_1 .
8. Konačno se **konstruiše poprečni presek** i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.

Zadatak 10

ε_c (‰)	ε_{s1} (‰)	ξ	ζ	ω_1 (%)	κ	μ
3.50	2.00	0.636	0.735	51.515	1.625	0.379
3.50	1.95	0.642	0.733	51.988	1.620	0.381
3.50	1.90	0.648	0.730	52.469	1.615	0.383

4. $\varepsilon_{s1} = 1.9\text{‰} < 2.5\text{‰}$, radimo obostrano armiranje:

ε_c (‰)	ε_{s1} (‰)	ξ	ζ	ω_1 (%)	κ	μ
3.50	2.50	0.583	0.757	47.222	1.672	0.358

4. Računa se:

$$M_{Rd,lim} = \left(\frac{53}{1.672} \right)^2 \cdot 40 \cdot 1.42 = 570.72 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = M_{Eds} - M_{Rd,lim} = 661 - 570.72 = 90.28 \text{ kNm}$$

Zadatak 10

ε_c (‰)	ε_{s1} (‰)	ξ	ζ	ω_1 (%)	κ	μ
3.50	2.50	0.583	0.757	47.222	1.672	0.358

5. Računa se:

$$A_{s2} = \frac{F_{s2}}{\sigma_{s2}} = \frac{\Delta M}{(d - d_2) \sigma_{s2}} = \frac{90.28 \cdot 10^2}{(53 - 5.5) \cdot 43.5} = 4.37 \text{ cm}^2$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\xi_{\text{lim}} - \frac{d_2}{d}}{\xi_{\text{lim}}} \varepsilon_{cu2} = \frac{0.584 - \frac{5.5}{53}}{0.584} \cdot 3.5 = 2.878 > 2.175 = \frac{435}{200} \left(= \frac{f_{yd}}{E_s} \right) \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta A_{s1} = \frac{\Delta F_{s1}}{\sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{(d - d_2) f_{yd}} = A_{s2} = 4.37 \text{ cm}^2 \quad \sigma_{s1} = f_{yd} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_{s1} = 47.222 \cdot \frac{40 \cdot 53}{100} \cdot \frac{1.42}{43.5} - \frac{700}{43.5} + 4.37 = 32.7 - 16.1 + 4.37 = 21.0 \text{ cm}^2$$

Zadatak 10

6. Usvojeno: $7\text{Ø}20$ (21.98 cm^2)
 $2\text{Ø}20$ (6.28 cm^2)

7. Računanje težišta armature

$$d^I = 3.5 + 0.8 + 2.0/2 = 5.3 \text{ cm}$$

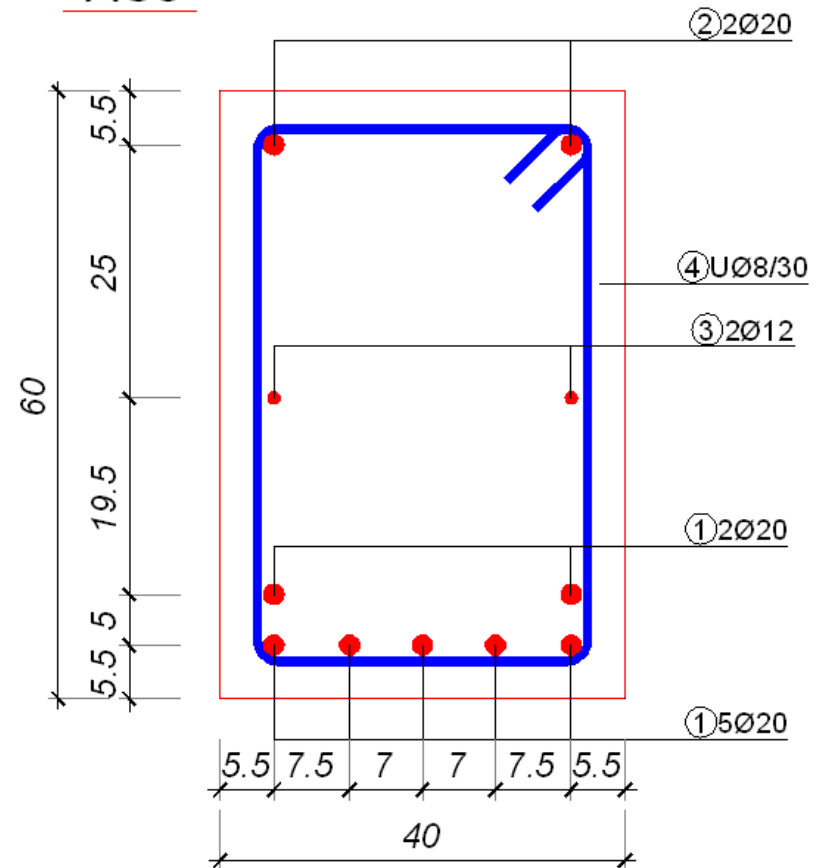
$$d^{II} = 5.3 + 3.0 + 2 \times 2.0/2 = 10.3 \text{ cm}$$

$$d_1 = (5 \times 5.3 + 2 \times 10.3)/7 = 6.73 \text{ cm}$$

$$d_{1, \text{stv}} < d_{1, \text{prp}} \text{ (na strani sigurnosti)}$$

8. Konstruisanje preseka

XC3



"T" preseci - VEZANO dimenzionisanje



"T" preseci - VEZANO dimenzionisanje

- Poznato:
 - statički uticaji ($M_{G,Q}$) – sračunato
 - kvalitet materijala (f_{cd}, f_{yd}) – usvojeno
 - dimenzije preseka (b, b_{eff}, h, h_f)
- Nepoznato:
 - površina armature (A_{s1})
 - položaj neutralne linije

"T" preseci - VEZANO dimenzionisanje

1. Sračunavaju se granični računski statički uticaji za odgovarajuće **proračunske situacije**

$$M_{Ed} = \gamma_G \cdot M_{G,k} + \gamma_{Q,1} \cdot M_{Qk,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} \cdot M_{Qk,i}$$

2. Pretpostavlja se d_1 i sračunava d :

$$d = h - d_1$$

3. Sračunava se koeficijent k :

$$k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_{eff} \cdot f_{cd}}}}$$

i pročitati koeficijent ξ koji definiše položaj neutralne linije.

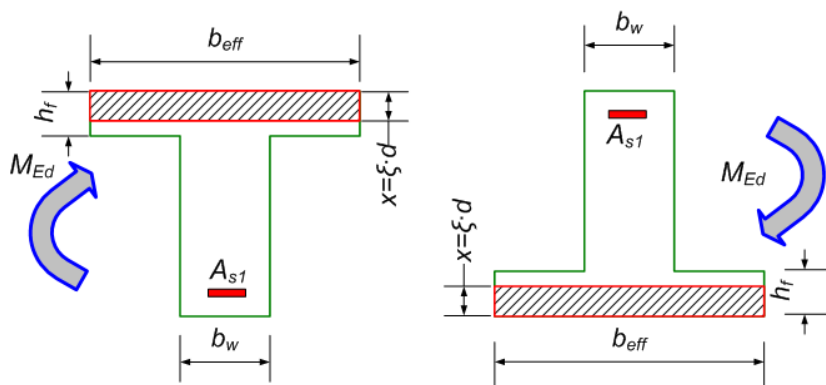
"T" preseci - VEZANO dimenzionisanje

4. Sračunava se položaj neutralne linije x , i upoređuje sa debljinom ploče, h_f

$$x = \xi \cdot d$$

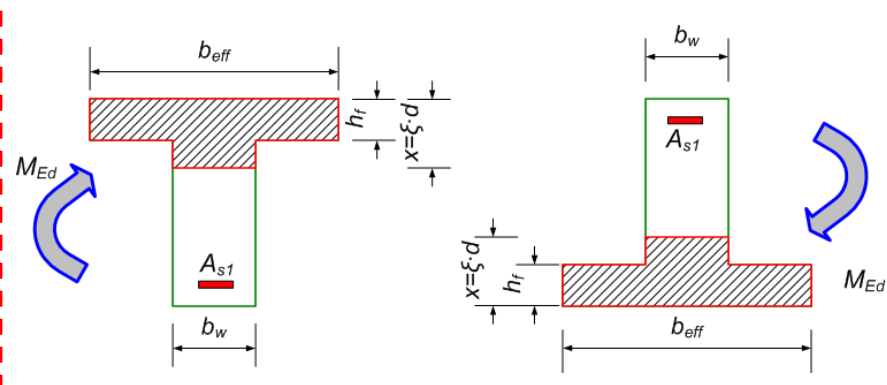
a) $x < h_f$

proračun **PRAVOUGAONOG PRESEKA**, sa širinom b_{eff}



b) $x > h_f$

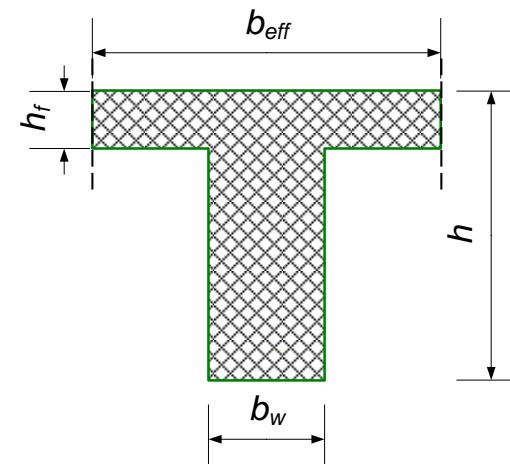
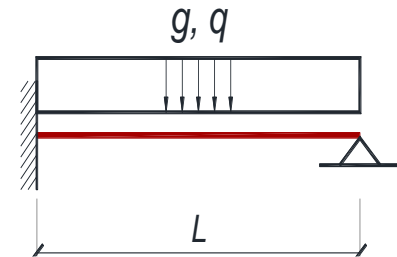
proračun **"T" PRESEKA**



Zadatak 11

Za gredu čiji su statički sistem i poprečni presek prikazani na skici, opterećenju jednako raspodeljenim stalnim (g_k), odnosno promenjivim (q_k) opterećenjem, dimenzionisati karakterističan presek u polju prema merodavnom momentu savijanja. Osovinski razmak greda jednak je 5.0 m. Podaci za proračun:

$g_k = 30 \text{ kN/m}$	$q_k = 25 \text{ kN/m}$	$L = 6.2 \text{ m}$
$b_w = 30 \text{ cm}$	$h = 60 \text{ cm}$	$h_f = 15 \text{ cm}$
C 30/37	B500 B	XC1



C30/37 \rightarrow $f_{cd} = 1.70 \text{ kN/cm}^2$

B500 B \rightarrow $f_{yd} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$

XC1 \rightarrow $c_{nom} = 25 \text{ mm}$

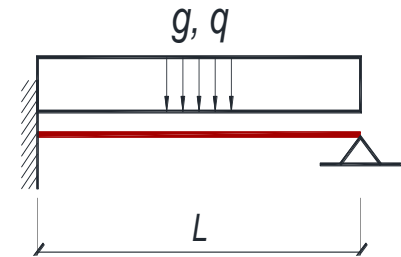
Zadatak 11

1. Sračunavanje karakterističnih i proračunskih vrednosti momenata savijanja:

$$M_{G,k} = \frac{9}{128} g_k \cdot L^2 = \frac{9}{128} 30 \cdot 6.2^2 = 81.1 \text{ kNm}$$

$$M_{Q,k} = \frac{9}{128} q_k \cdot L^2 = \frac{9}{128} 25 \cdot 6.2^2 = 67.6 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 1.35 \cdot 81.1 + 1.5 \cdot 67.6 = 210.9 \text{ kNm}$$

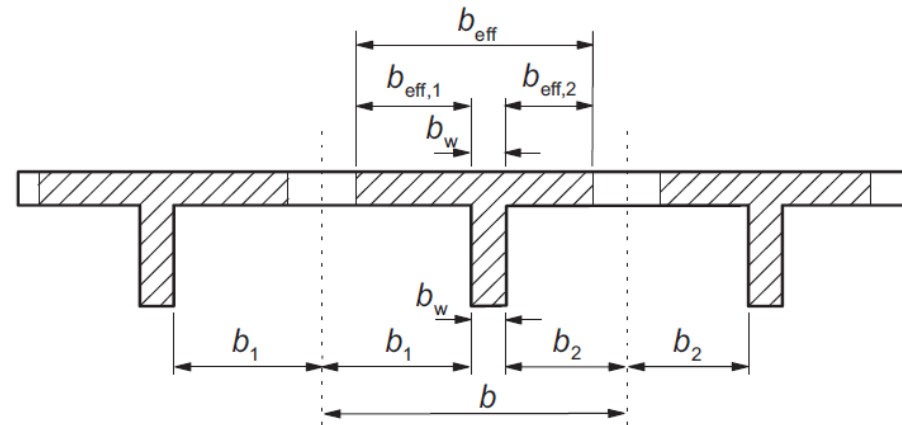


2. Pretpostavka: $d_1 = 7 \text{ cm}$ $d = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$

3. Za $b_1 = b_2 \approx b/2$ ($b = 500 \text{ cm}$)

$$b_{eff} = \begin{cases} 0.4 \cdot l_0 + b_w, & b \geq l_0 \\ 0.2 \cdot l_0 + 0.2 \cdot b, & b < l_0 \end{cases}$$

$$b_{eff} = 0.4 \cdot 0.75 \cdot 620 + 30 = 216 \text{ cm}$$



Zadatak 11

3. Pretpostavka: $x < h_f$

$$k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Ed}}{b_{eff} \cdot f_{cd}}}} = \frac{53}{\sqrt{\frac{21090}{216 \cdot 1.7}}} = 6.993 \quad \longrightarrow \quad \xi = 0.025$$

$x = 0.025 \cdot 53 = 1.325 \text{ cm} < 15 = h_f !$

→ presek se dimenzioniše kao pravougaoni sa širinom pritisnute zone b_{eff}

4.

$$A_{s1} = 2.021 \times \frac{216 \times 53}{100} \times \frac{1.7}{43.5} = 9.04 \text{ cm}^2$$

$$A_{s1,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.26 \cdot \frac{2.9}{500} \cdot 30 \cdot 53 = 2.40 \text{ cm}^2 \\ 0.0013 \cdot 30 \cdot 53 = 2.07 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} = 2.40 < 9.04 \text{ cm}^2 = A_{s1,pot}$$

5. Usvaja se: **3Ø20** (9.42 cm²)

Zadatak 11

6. Računanje težišta armature

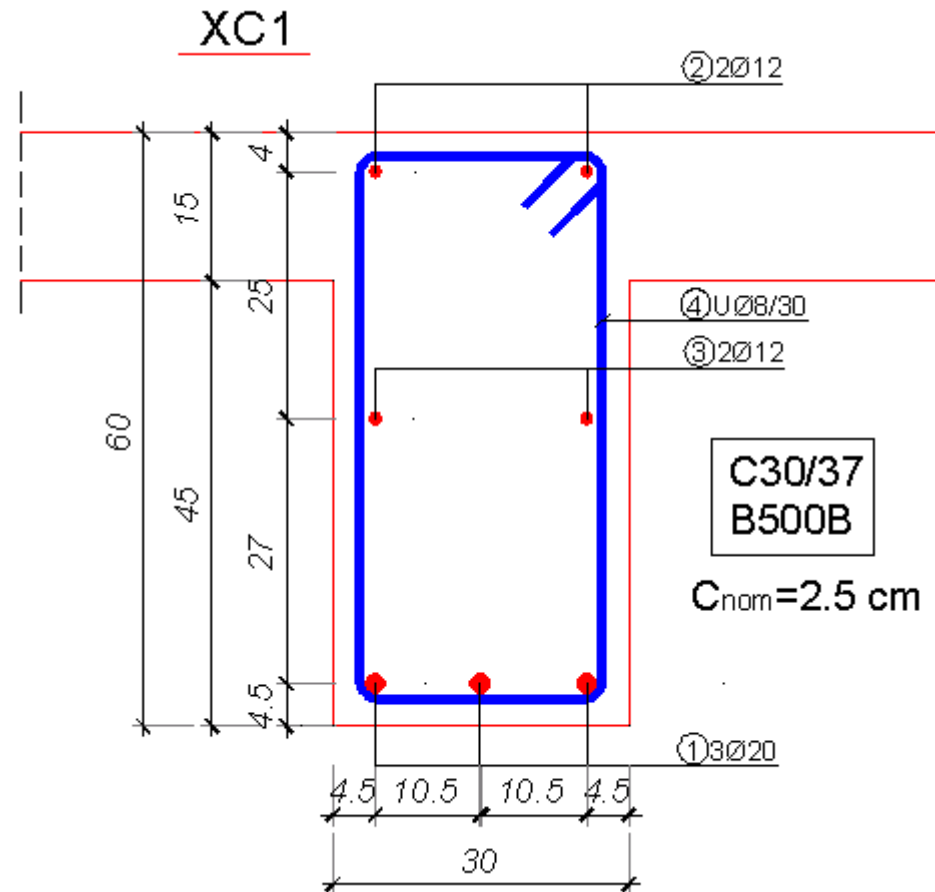
$$d^I = d_1 = 2.5 + 0.8 + 2.0/2 = 4.3 \text{ cm}$$

$d_{1,stv} < d_{1,prp}$ – na strani sigurnosti, ali pogrešno pretpostavljen broj redova armature – ponovni proračun:

$$d = 60 - 4.3 = 55.7 \text{ cm}$$

$$k=7.071, \omega_1=2.021, A_{s1}= 9.50 \text{ cm}^2 (!!)$$

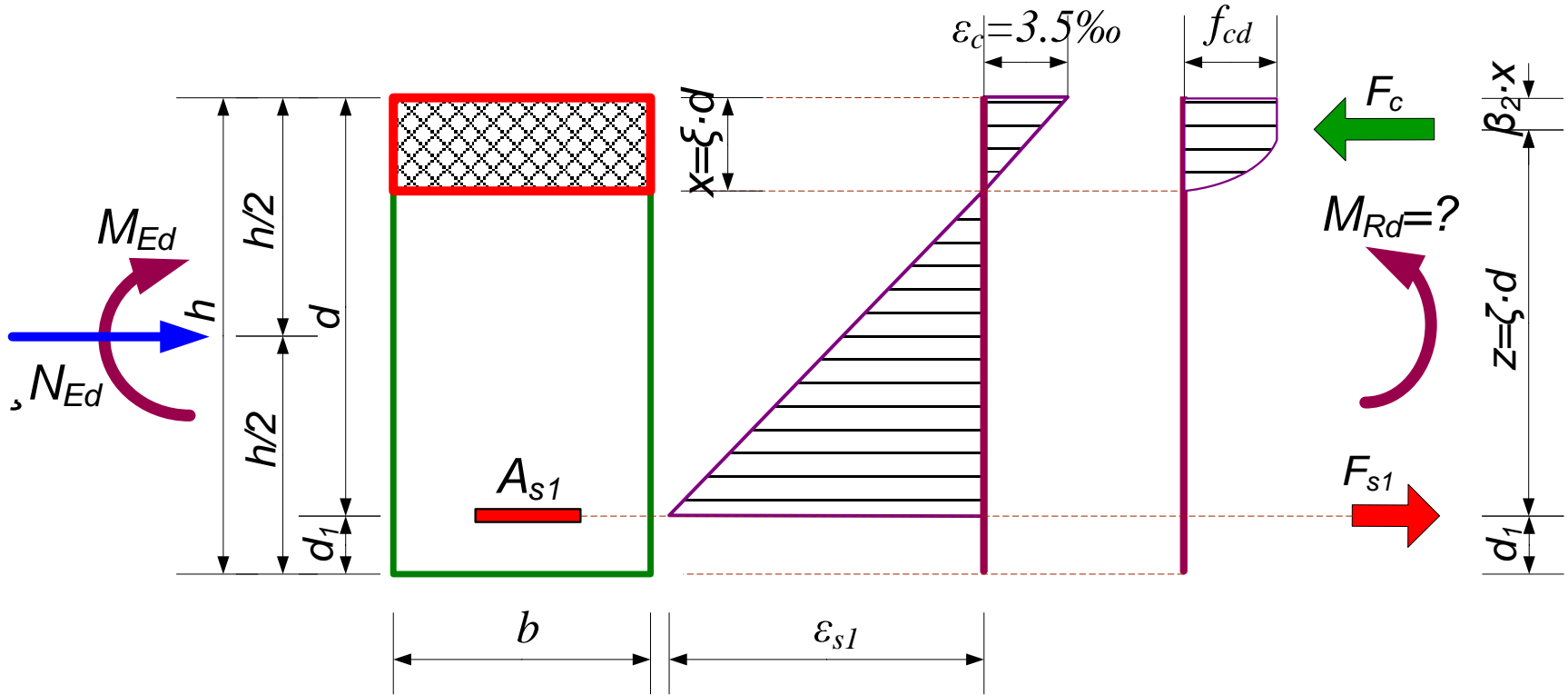
7. Konstruisanje preseka



"T" preseci - VEZANO dimenzionisanje



Određivanje M_{Rd} - bez uzimanja u obzir nosivosti A_{s2}



$$\sum N = 0$$



$$F_c - F_{s1} = N_{Ed}$$

$$\sum M_s = 0$$



$$M_{Rds} = F_c z = M_{Eds} = M_{Ed} + N_{Ed} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1 \right)$$

Određivanje M_{Rd} - bez uzimanja u obzir nosivosti A_{s2}

$$\boxed{\sum N = 0} \quad A_{s1} = \beta_1 \xi \frac{f_{cd}}{f_{yd}} bd - \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} = 0.810 \xi \frac{f_{cd}}{f_{yd}} bd - \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} = \omega_1 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} bd - \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$$

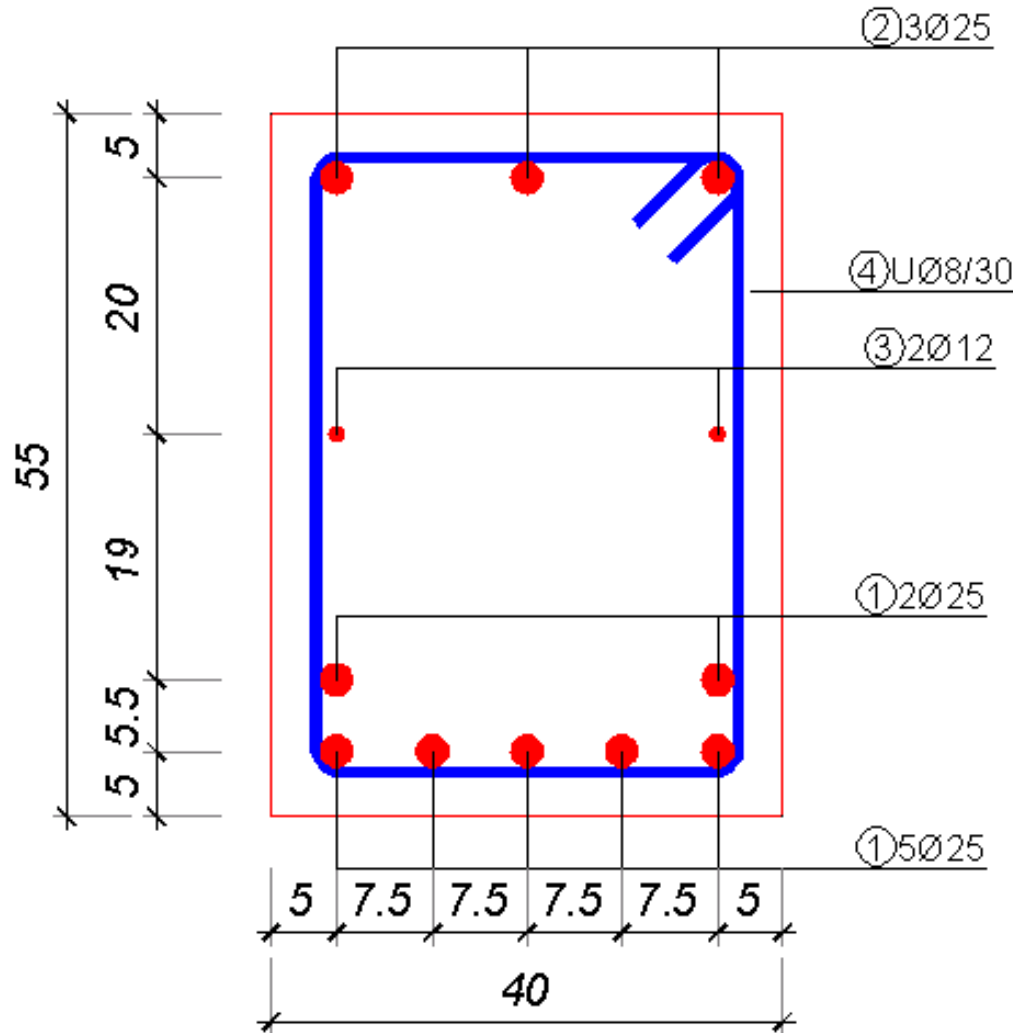
$$\omega_1 = 0.810 \xi = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd} + N_{Ed}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad \xrightarrow{\text{TABLICE}}$$

$$\boxed{\sum M_s = 0} \quad k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Eds}}{bf_{cd}}}} \quad \xrightarrow{\quad} \quad M_{Rds} = M_{Eds} = \left(\frac{d}{k} \right)^2 \cdot b \cdot f_{cd}$$

K

$$M_{Rd} = M_{Rds} - N_{Ed} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1 \right)$$

Zadatak 12



C30/37

B500B

$$N_{Ed} = -360 \text{ kN}$$

$$d^I = 5.0 \text{ cm}$$

$$d^{II} = 10.5 \text{ cm}$$

$$d_1 = (5 \times 5.0 + 2 \times 10.5) / 7$$

$$d_1 = 6.57 \text{ cm}$$

$$d = 55 - 6.57 = 48.43 \text{ cm}$$

$$A_{s1} = 34.37 \text{ cm}^2$$

(7RØ25)

Zadatak 12

C30/37 $f_{cd} = 0,85 \cdot 30 / 1,5 = 17 \text{ MPa} = 1,7 \text{ kN/cm}^2$

B500 B $f_{yd} = 500 / 1,15 = 435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd} + N_{Ed}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{34,37 \cdot 43,5 + (-360)}{40 \cdot 48,43 \cdot 1,7} = 0,3447 = 34,47\%$$

ε_c (‰)	ε_{s1} (‰)	ξ	ζ	ω_1 (%)	k	μ
3.50	4.70	0.427	0.822	34.553	1.876	0.284

$$M_{Rds} = M_{Eds} = \left(\frac{d}{k} \right)^2 \cdot b \cdot f_{cd} = \left(\frac{48,43}{1,876} \right)^2 \cdot 40 \cdot 1,7 = 45318 = 453,18 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd} = M_{Rds} - (-N_{Ed}) \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1 \right) = 453,18 + 360 \cdot \left(\frac{0,55}{2} - 0,0657 \right) = 528,53 \text{ kNm}$$

