



Универзитет у Београду – Грађевински  
факултет [www.grf.bg.ac.rs](http://www.grf.bg.ac.rs)

---

Студијски програм: **ГРАЂЕВИНАРСТВО МАСТЕР АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ**

Модул: **КОНСТРУКЦИЈЕ**

Година/Семестар: **I година / I семестар**

Назив предмета (шифра): **БЕТОНСКИ МОСТОВИ (M0K1BM)**

Наставник: **асис. Стефан Ж. Митровић**

Наслов вежби: **Оптерећења мостова; Расподела оптерећења**

Датум: 28.10.2024.

---

*Београд, 2024.*

*Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу студената Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.*

Грађевински факултет Универзитета у  
Београду, 2024.

# 3. Вежба

- Садржај:

1. Прописи и правилници за оптерећења;

2. Анализа оптерећења на мостовима;

3. Расподела оптерећења:

- 3.1. Увод

- 3.2. **Пример 1** – Широки друмски мост са два главна носача

- 3.3. **Пример 2** – Широки друмски мост са више главних носача

# Прописи и правилници за оптерећења

## Домаћи прописи (важили до краја 2019. године)

### Југословенски правилници и стандарди за грађевинске конструкције (ЈУС)

- Правилник о техничким нормативима за **оптерећења** носећих грађевинских конструкција (с.л. СФРЈ 26/88).
- ЈУС.У.Ц7.123(1988.) – **Сопствена тежина** конструкција и неконструктивних елемената и ускладиштеног материјала који се узима у обзир при димензионисању.
- Правилник о привременим техничким прописима за грађење у **сеизмичким** подручјима (с.л. СФРЈ 39/64 – не важи за објекте високоградње).
- Правилник о техничким нормативима за пројектовање **инжењерских објеката у сеизмичким подручјима** (1986 – нацрт).

## Домаћи прописи (важили до краја 2019. године)

### Југословенски правилници и стандарди за грађевинске конструкције (ЈУС)

- ЈУС.У. Ц7.113 (1991.) Основе прорачуна грађевинских конструкција . Оптерећење **ветром**. Оптерећење ветром осталих грађевинских конструкција осим зграда.

- Правилник о техничким нормативима за одређивање **оптерећења мостова** (с.л. СФРЈ 1/91).

- Правилник о техничким нормативима за одређивање величине оптерећења и категоризација **железничких мостова**, пропуста и осталих објеката на железничким пругама (с.л. СФРЈ 23/92).

# Европски прописи (на снази од јануара 2020. године) - Еврокодovi (EN)

## EN 1991

- EN 1991-1-1 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-1: Општа дејства — **Запреминске тежине, сопствена тежина, корисна оптерећења за зграде.**

- EN 1991-1-3 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-3: Општа дејства — **Оптерећења снегом.**

- EN 1991-1-4 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-4: Општа дејства — **Дејства ветра.**

- EN 1991-1-5 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-5: Општа дејства — **Топлотна дејства.**

# Европски прописи (на снази од јануара 2020. године) - Еврокодovi (EN)

## EN 1991

- EN 1991-1-6 - Еврокод 1 - Дејства на конструкције - Део 1-6: Општа дејства - **Дејства током извођења.**
- EN 1991-1-7 -Еврокод 1 - Дејства на конструкције - Део 1-7: Општа дејства - **Инцидентна дејства.**
- EN 1991-2 - Еврокод 1: Дејства на конструкције - Део 2: **Саобраћајно оптерећење на мостовима.**

# Анализа оптерећења на мостовима

- Најважнији корак при прорачуну сваке конструкције је анализа оптерећења. У оквиру анализе оптерећења потребно је пажљиво сагледати сва оптерећења која могу деловати на конструкцију моста као и исправно проценити њихове интензитета.
- Одређивање интензитета и комбиновање оптерећења дефинисано је прописима и стандардима за мостове.
- Основна подела оптерећења на мостовима је у три групе:
  - 1. Стално оптерећење**
  - 2. Корисно оптерећење**
  - 3. Инцидентно оптерећење**



# Стално оптерећење на мостовима

- **Стално оптерећење** на мостовима обухвата:
  1. **Сопствену тежину елемената конструкције моста** што је дефинисано запреминском тежином материјала од кога су елементи направљени (АБ и ПНБ).
  2. **Додатно стално оптерећење** које обухвата тежину асфлатних застора (на друмским мостовима), шина, прагова и туцаничког застора (на железничким мостовима), хидроизолације, еластичних одбојника, пешачких ограда, расвете,....
  3. Оптерећење од скупљања и течења бетона, **силе које настају од ПН**, притисак тла, притисак воде,...



EN 1991-1:2002: Запреминске тежине, сопствена тежина, корисна оптерећења за зграде

## Запреминска тежина материјала

$\gamma$  (kN/m<sup>3</sup>)

### Застор друмских мостова

Ливени асфалт и асфалт бетон

24-25

Мастик бетон

18-22

Вруће ваљани асфалт

23

### Застор железничких мостова

Заштитни слој бетона

25

Нормални туцанички застор (гранит, гнајс)

20

Застор од базалта

26

## Оптерећење по јединичној дужини

$g_k$  (kN/m)

### засторног корита

Две шине UIC60

1.2

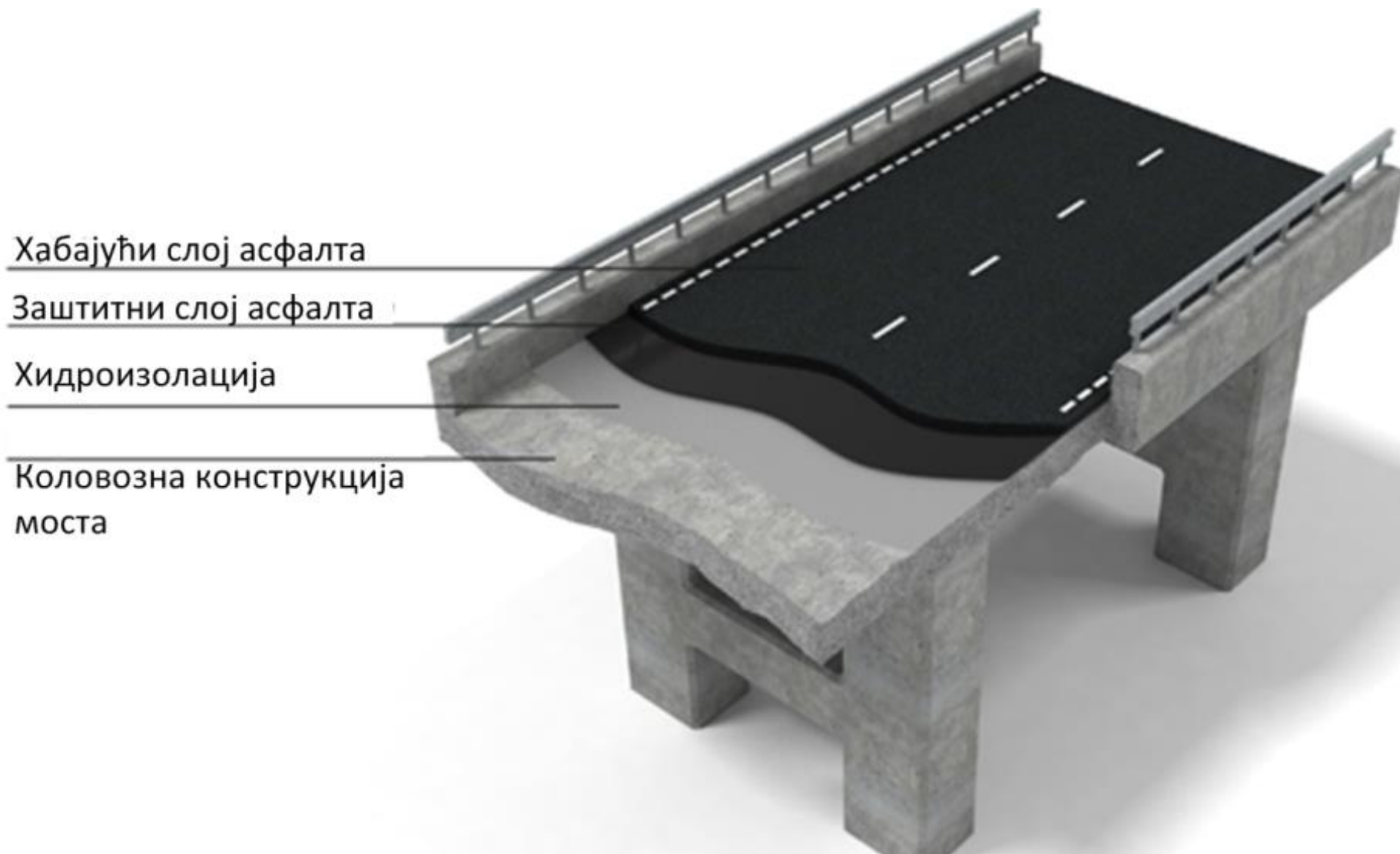
ПН бетонски прагови и причврсни прибор

4.8

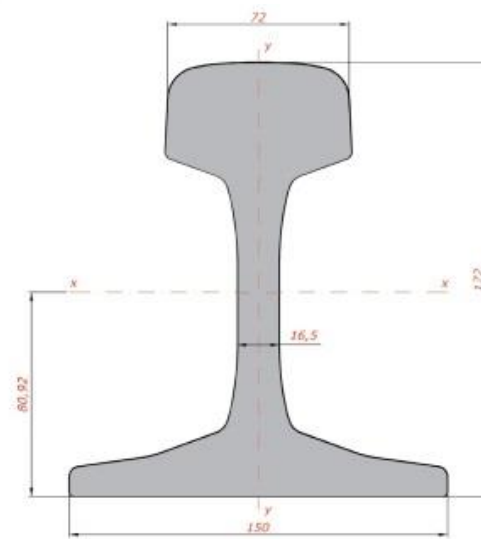
Дрвени прагови и причврсни прибор

1.9

# Друмски мостови – слојеви



# Железнички мостови – слојеви



# Корисно оптерећење на мостовима

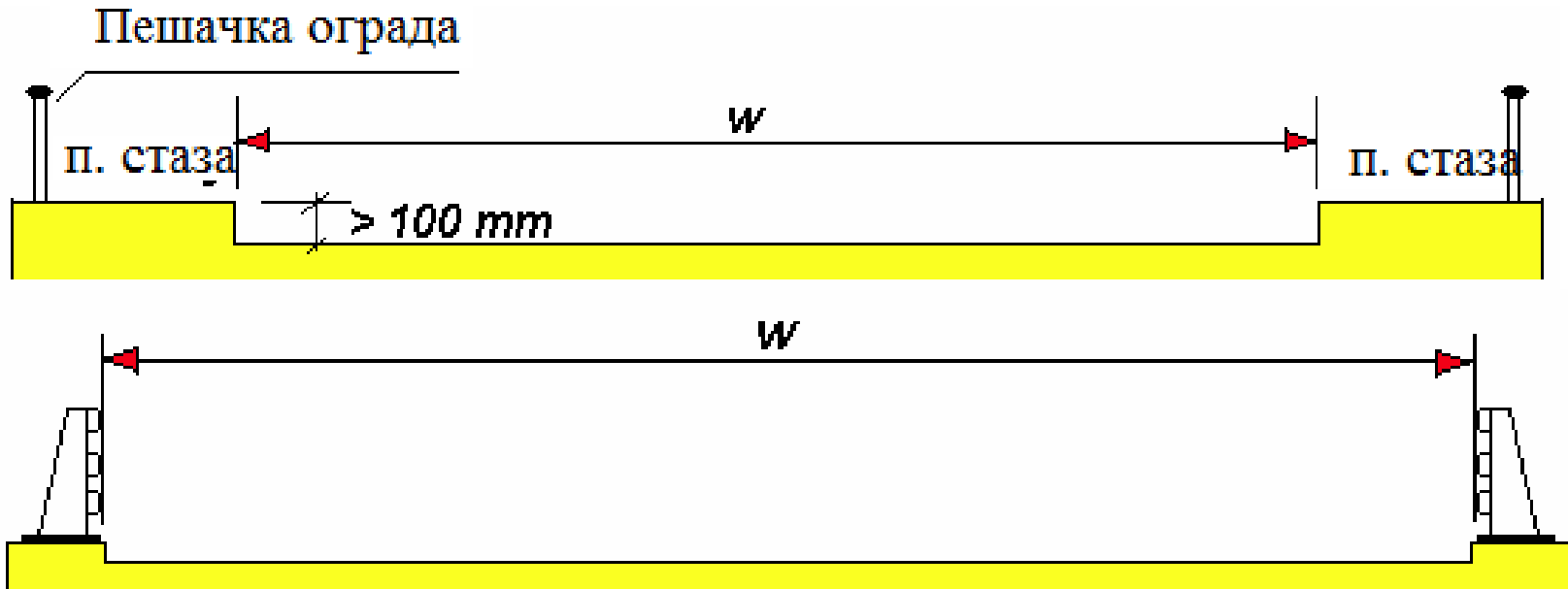
- **Корисно оптерећење на мостовима обухвата:**
  1. **Саобраћајно оптерећење – вертикално оптерећење услед тежине возила** и хоризонтално оптерећење услед покретања и кочења возила, промене брзине или смера кретања.
  2. Температура.
  3. Ветар.
  4. Снег.
  5. Лед.
  6. Опрема приликом извођења моста,...

# Инцидентно оптерећење на мостовима

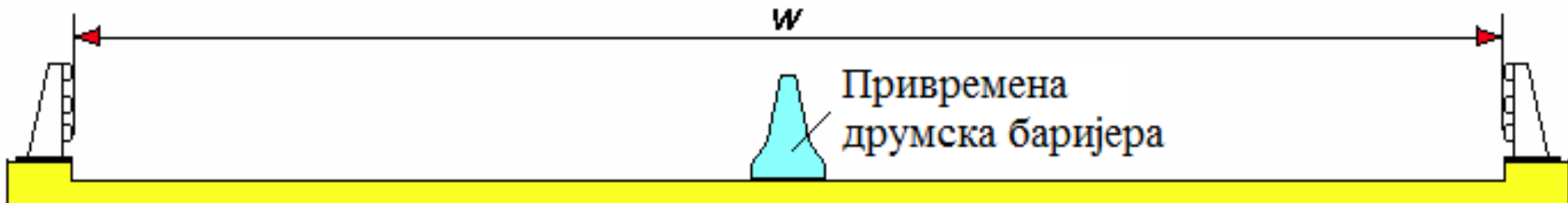
- **Инцидентно оптерећење на мостовима обухвата:**
  1. **Оптерећење изазвано дејством земљотреса – сеизмичко оптерећење.**
  2. Удар возила и пловних објеката у елементе конструкције моста.
  3. Исклизнуће воза из шина,...

# Саобраћајна оптерећења друмских мостова

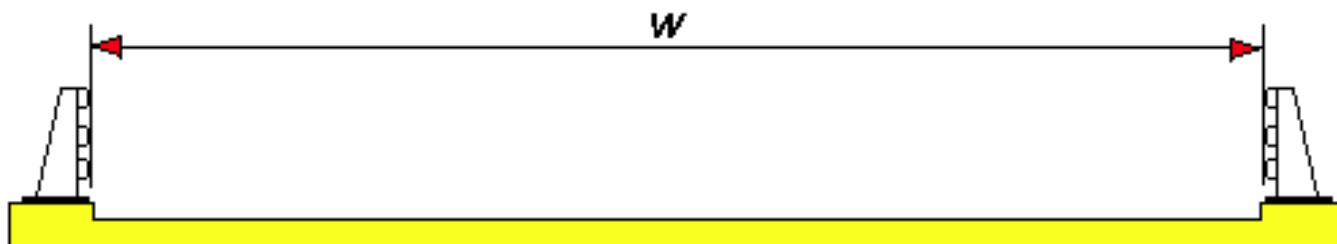
- Коловоз се за потребе анализе саобраћајног оптерећења дели на **називне траке**.
- За сваку појединачну проверу граничног стања, број називних трака које се разматрају, као и њихов положај на коловозу и означавање се бира тако да се добију најнеповољнији утицаји.
- **Ширина коловоза  $w$**  је растојање између ивичњака или унутрашње ивице система за задржавање возила (безбедносне ограда).



- Ако постоји централни разделни део он се не узима у ширину коловоза, као ни ширина фиксних безбедносних ограда или ивичњака.
- Када је коловоз трајном централном баријером физички подељен на два дела, онда се сваки део коловоза посебно дели на називне траке.
- У случају привремене баријере разматра се читаву ширину коловоза.



- Коловоз се за потребе анализе саобраћајног оптерећења дели на **називне траке** ширине  $w_i$ .
- Број саобраћајних трака  $n_i$  је цео број (површине 1, 2 и 3 на слици испод). Преостала површина је део коловоза који не припада називним тракама (површина 4).



$w$  – ширина коловоза

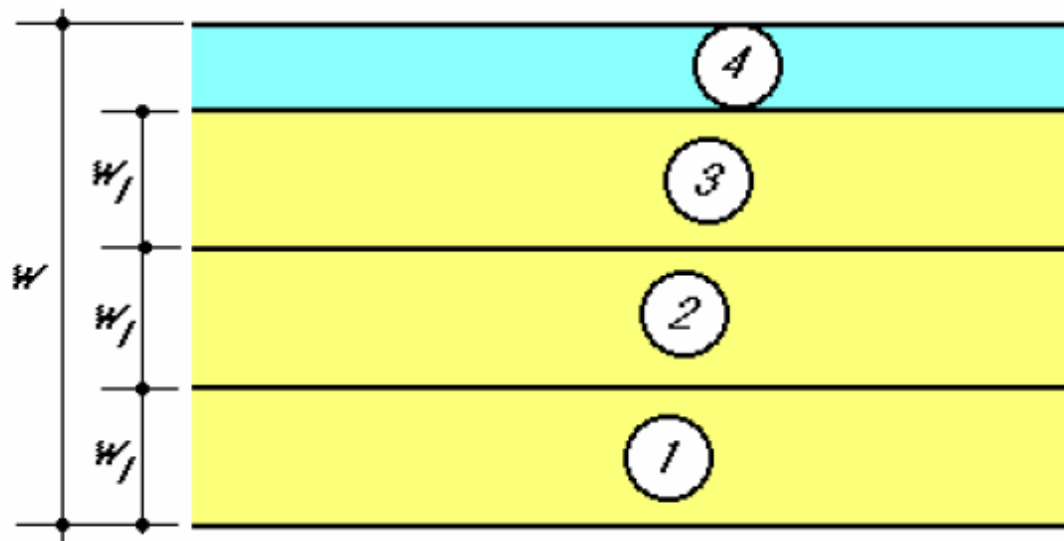
$w_i$  – ширина називне траке

1 - Називна трака 1

2 - Називна трака 2

3 - Називна трака 3

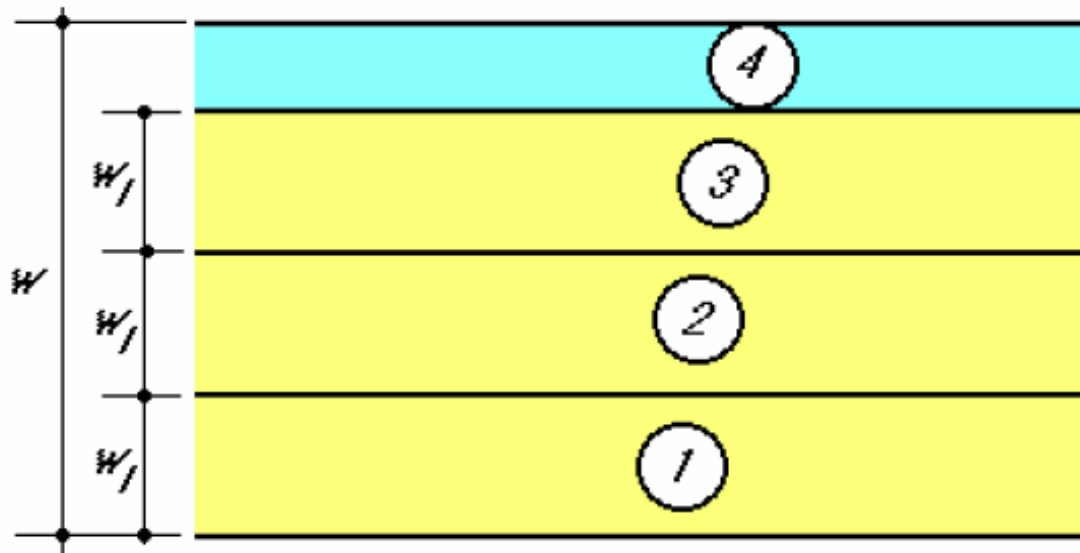
4 - Преостали део коловоза





- Број номиналних трака и њихова ширина дефинисани су у табели испод.

Ширина коловоза $w$	Број номиналних трака	Ширина номиналних трака $w_1$	Ширина преостале површине
$w < 5,4 m$	$n_1 = 1$	3 m	$w - 3m$
$5,4m \leq w < 6m$	$n_1 = 2$	$\frac{w}{2}$	0
$6m \leq w$	$n_1 = \text{Int}\left(\frac{w}{3}\right)$	3 m	$w - 3 \times n_1$



# Саобраћајна оптерећења друмских мостова

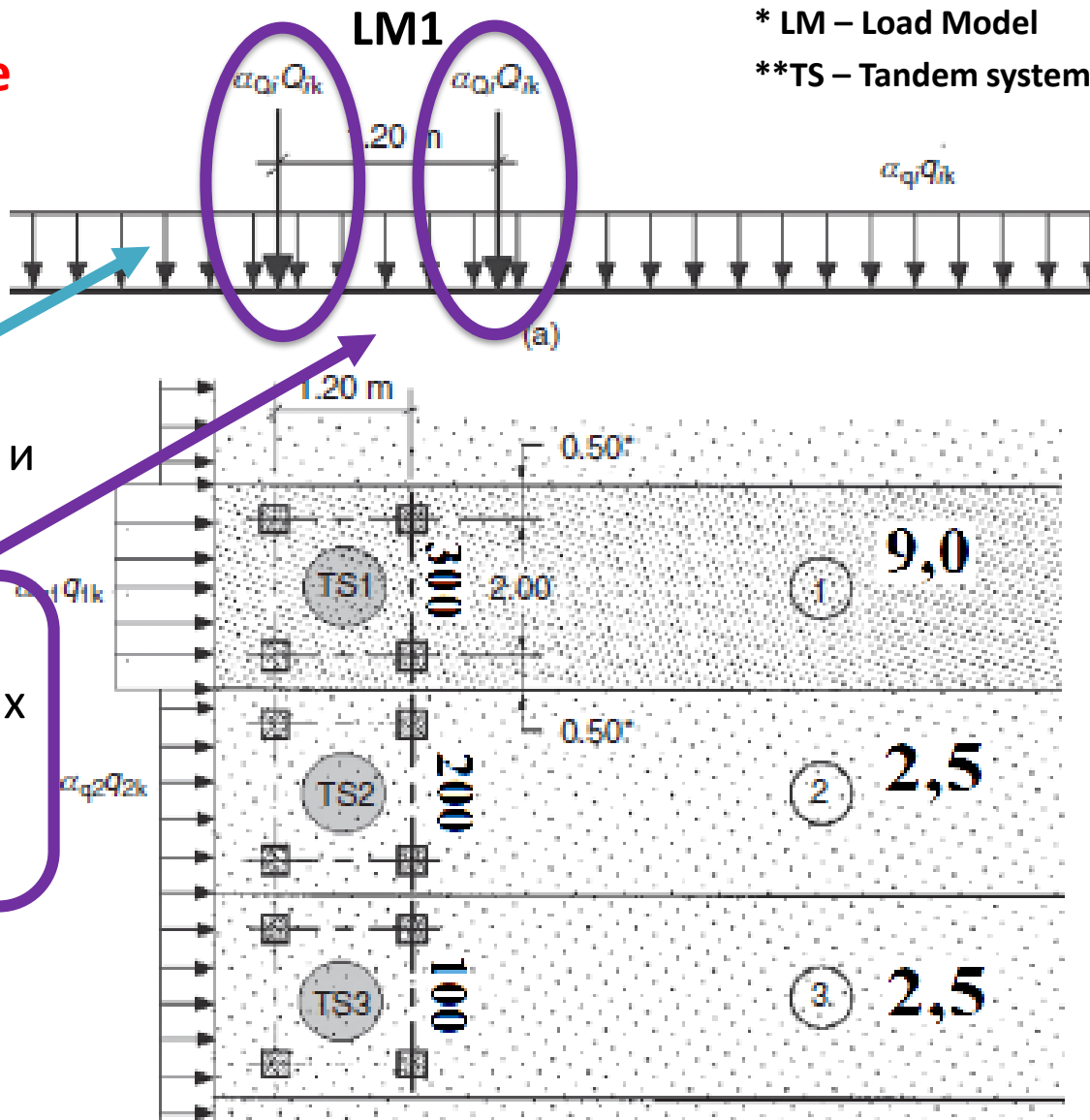
- За сваку проверу граничног стања приликом пројектовања, модел оптерећења у свакој називној траци, као и на преосталој површини, примењује се на дужини на којој даје најнеповољније утицаје.
- У стандарду **Еврокод** се за одређивање карактеристичних вредности користе се четири модела оптерећења за вертикална и хоризонтална саобраћајна оптерећења на друмским мостовима:

1. Модел оптерећења 1 - **LM1** – уобичајен друмски саобраћај на европским путевима (за глобалну анализу)
  2. Модел оптерећења 2 – **LM2** – једноосовинско тешко оптерећење за локалну анализу
  3. Модел оптерећења 3 – **LM3** – специјалних возила
  4. Модел оптерећења 4 – **LM4** – пешачка навала.
- У Еврокоду постоји 5 група оптерећења и 5 модела за прорачун замора.

## Моделе оптерећења LM1 се састоји од:

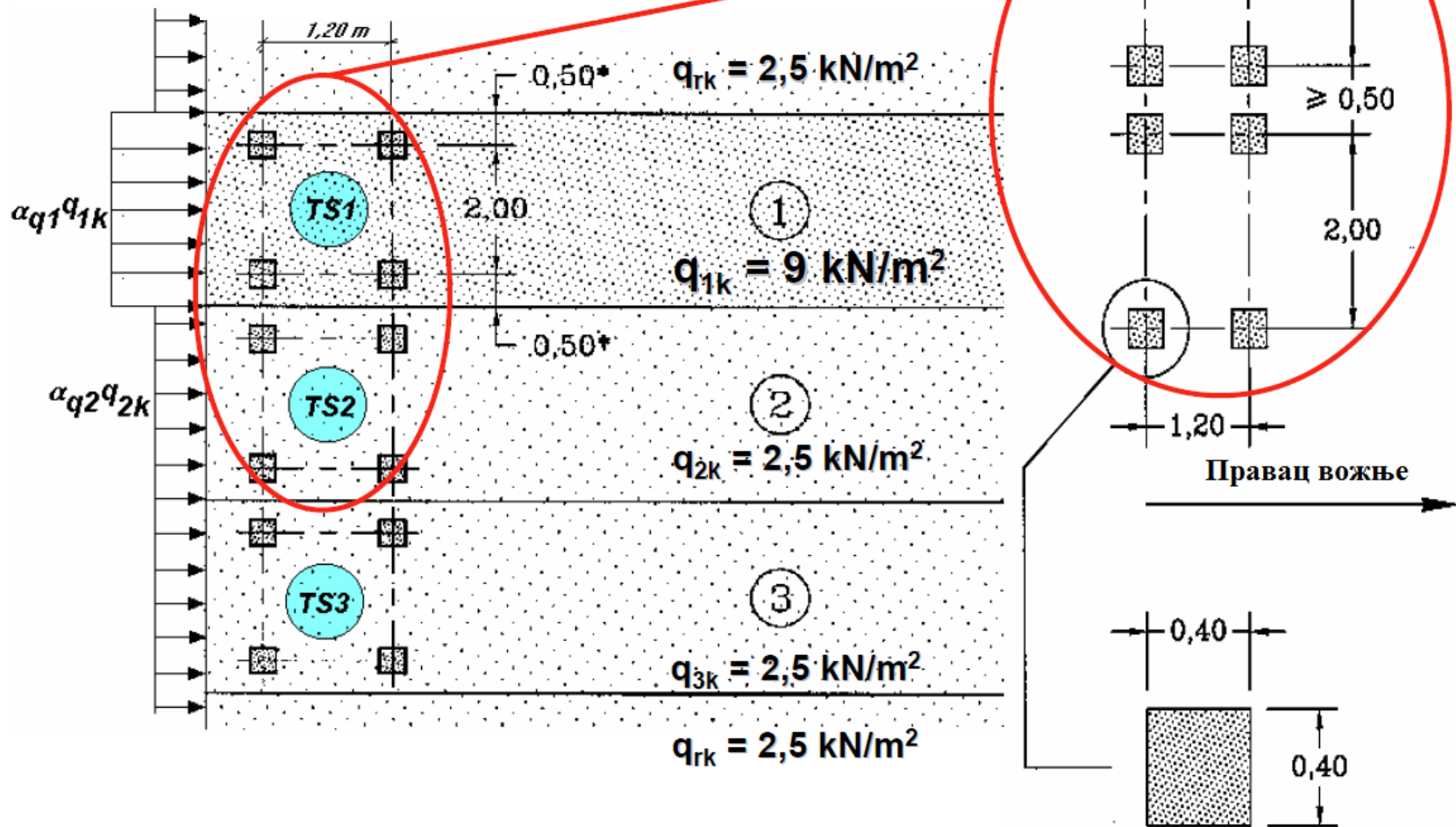
1. Једнакоподељеног површинског оптерећења:  
 $\alpha_{q1}=0.8^*$  за прву траку  
 $\alpha_{qi}=1.0^*$  за све остале траке и преосталу површину

2. Двоосовинског тандем система (TS) концентрисаних сила:  
 $\alpha_{Q1}=0.8^*$  за све траке

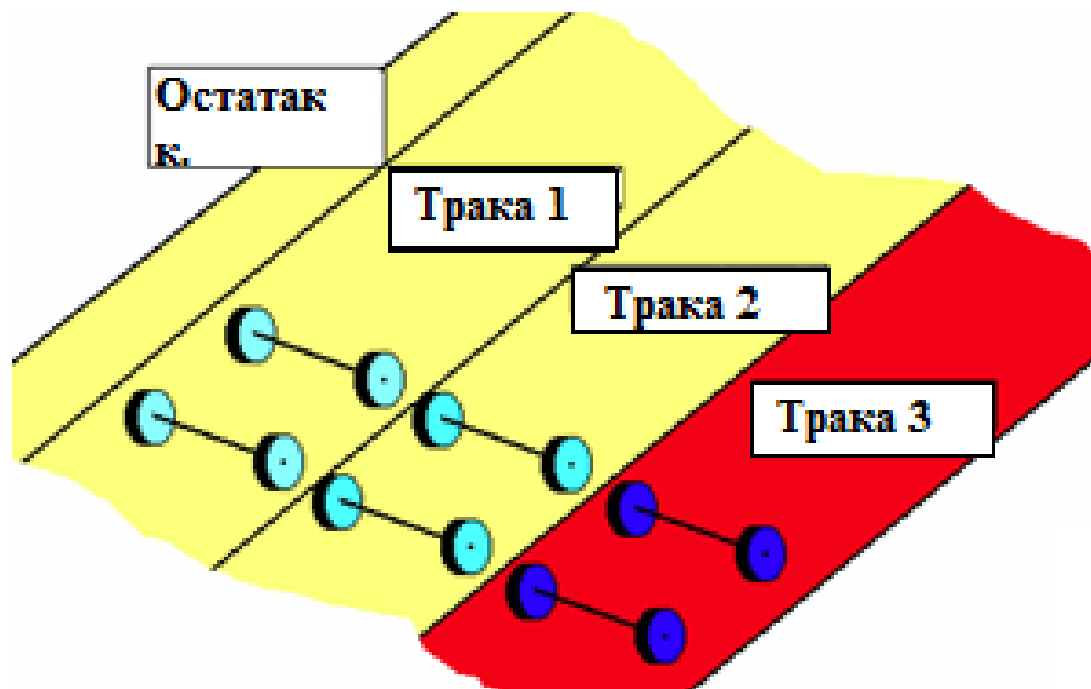


\* LM – Load Model  
 \*\*TS – Tandem system

У случају одређивања локалних утицаја тандем системи из суседних називних трака могу да се међусобно приближе, али не више од **0.5 m** ОСОВИНСКИ.

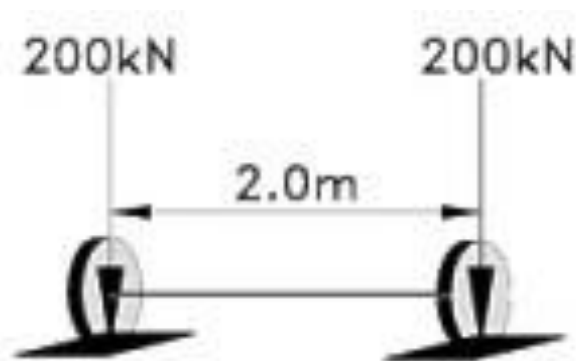
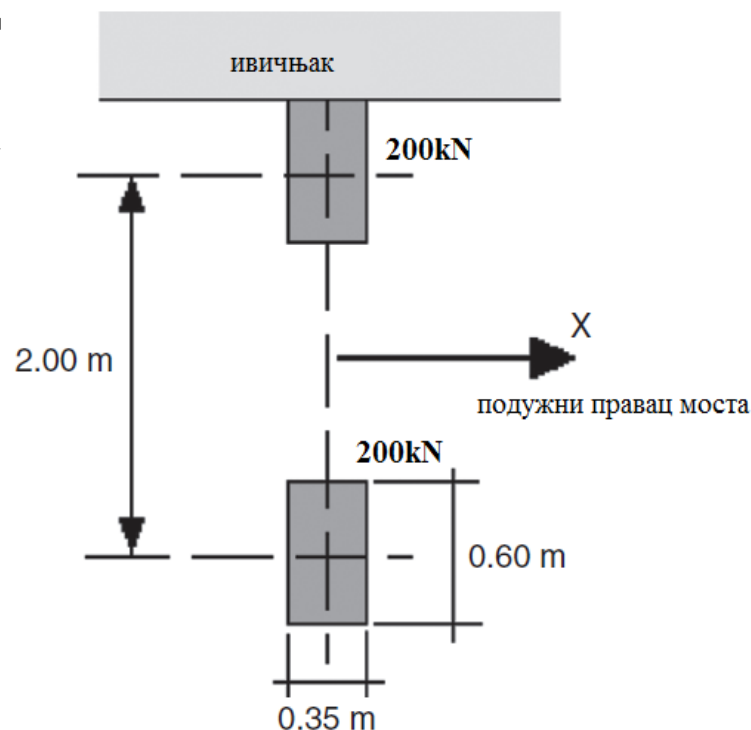


- Један тандем систем у једној називној траци.
- Тандем сила не може да се раздваја.
- Оптерећење по једном точку је једнако половини осовинског оптерећења.
- У случају одређивања локалних утицаја тандем системи из суседних називних трака могу да се међусобно приближе, али не више од 0.5 m осовински.



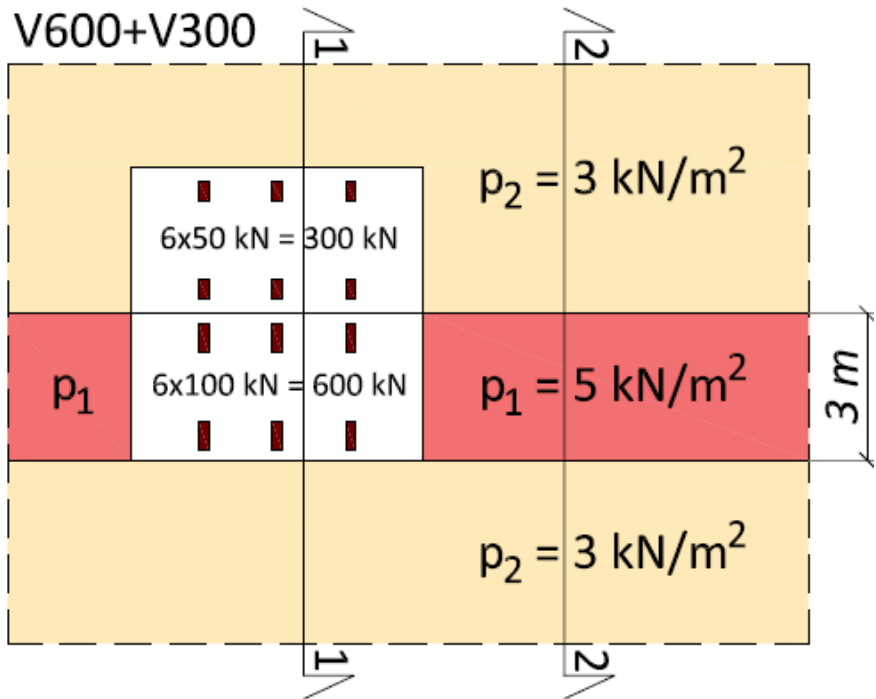
## Моделе оптерећења LM2:

- **Модел оптерећења LM2** састоји се од једноосовинског оптерећења које се користи за контроле локалних напрезања кратких елемената (од 3 до 7 m).
- Моделира се као две концентрисане силе интензитета **200 kN** које делују на осовинском растојању од **2.00 m**.
- Контактна површина точка може да буде непосредно уз ивичњак.
- Оптерећење се умножава коефицијентом  **$\beta$**  који износи **1.00** према Националном прилогу.
- Као упрошћење могу да се користе димензије контактне површине точка као код LM1 (**0.40x0.40 m**).



# Поређење саобраћајног оптерећења на друмским мостовима у основи према ЈУС-у и Еврокод-у

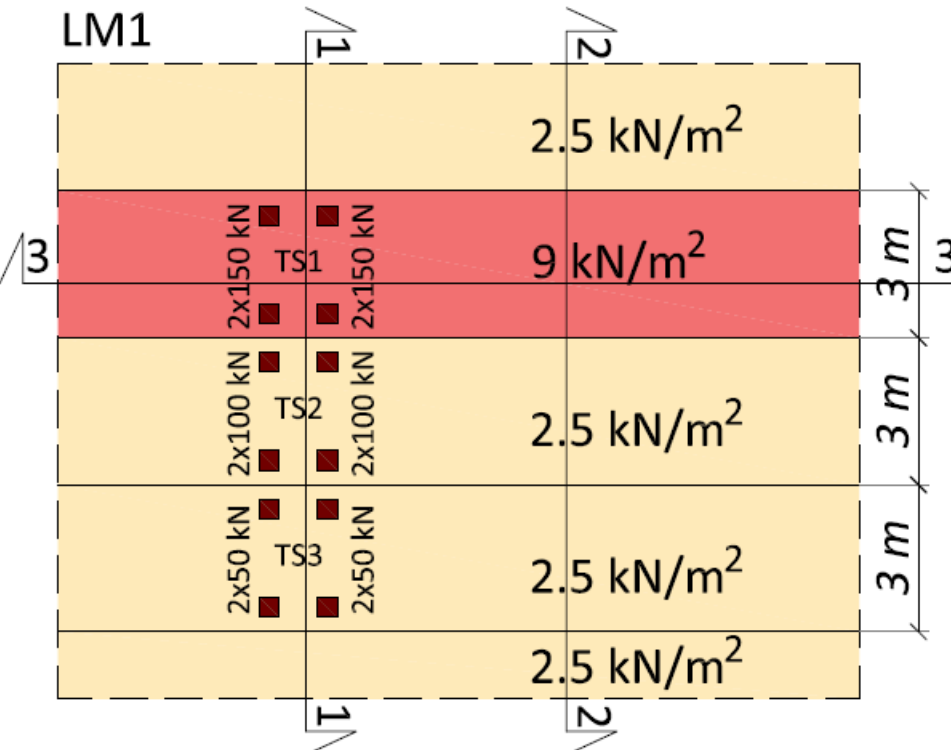
## Домаћи правилник ЈУС (V600+V300)



$K_d = 1.4 - 0.008 \times L$

На пешачким стазама  $3.00 \text{ kN/m}^2$

## Еврокод 1 (LM1)



Динамички коефицијент урачунат

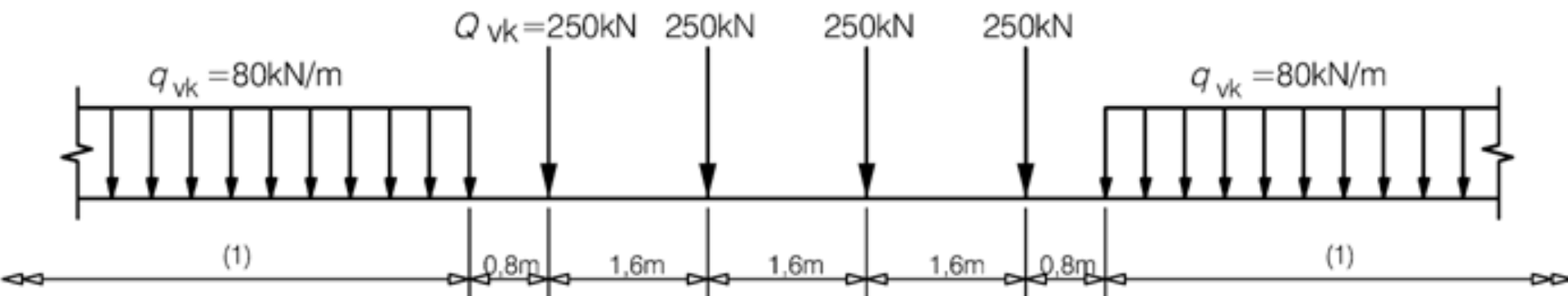
На пешачким стазама  $3.00 \text{ kN/m}^2$

# Саобраћајно оптерећење на железничким МОСТОВИМА

- Модел оптерећења железничког саобраћаја на европским ширококолосечним пругама за одређивање статичких утицаја вертикалног оптерећења услед уобичајеног саобраћаја: **(исто дефинисано и у домаћим прописима и у Еврокоду);**

По домаћим прописима:

**UIC71**



По Еврокоду:

**LM71**

Оптерећење се множи коефицијентима:

1. 0.75 – 0.83 – 0.91 – 1.00 – 1.10 – **1.21** – **1.33** – коефицијент категорије пруге
2.  $\Phi$  – динамички коефицијент:

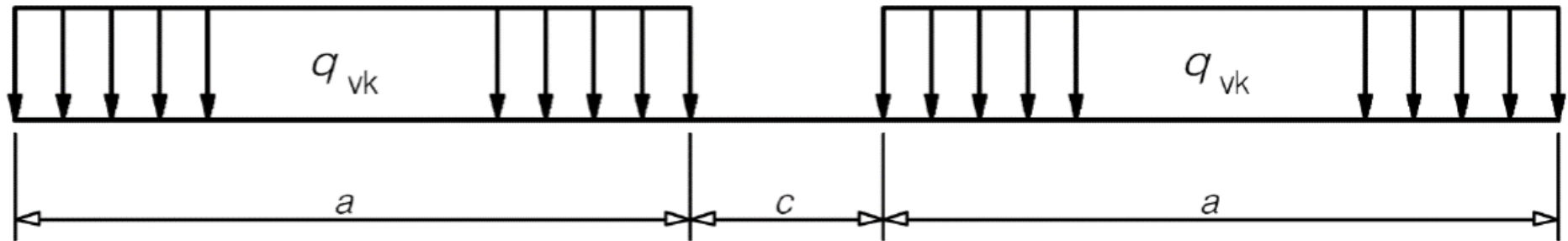
$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L_\Phi} - 0,2} + 0,82 \quad 1,00 \leq \Phi_2 \leq 1,67 \quad \Phi_3 = \frac{2,16}{\sqrt{L_\Phi} - 0,2} + 0,73 \quad 1,00 \leq \Phi_3 \leq 2,0$$



- Модел оптерећења **специјалног железничког саобраћаја** на европским ширококолосечним пругама:

1. Домаћи правилник: **SW / -2, SW / 0, SW / 1 и SW / 2;**

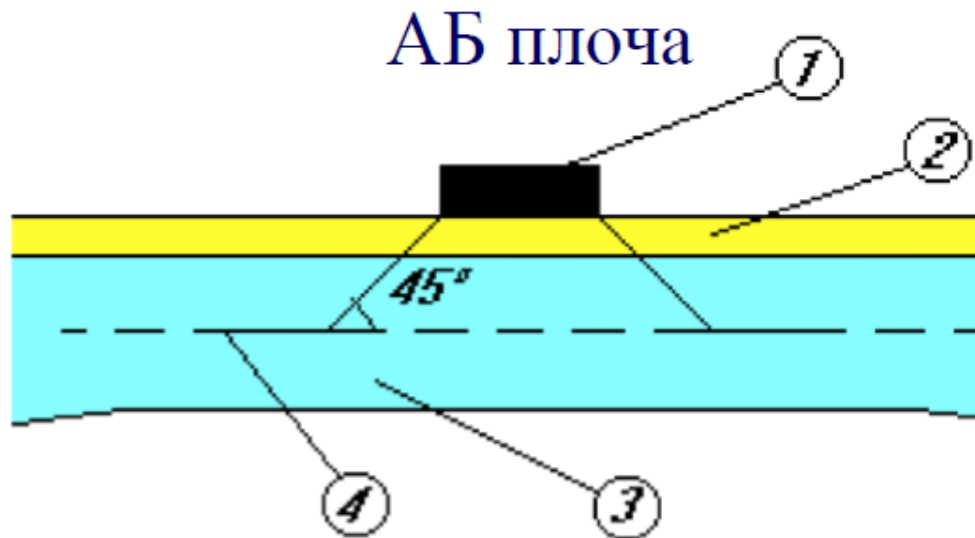
2. Еврокод: стандардни саобраћај SW / 0, тежак саобраћај SW / 2, путнички возови великих брзина HSLM, неоптерећен воз (једнако подељено оптерећење за контролу стабилности на претурање).



Модел оптерећења	$q_{vk}$ [kN/m]	$a$ [m]	$c$ [m]
SW/0	133	15,0	5,3
SW/2	150	25,0	7,0

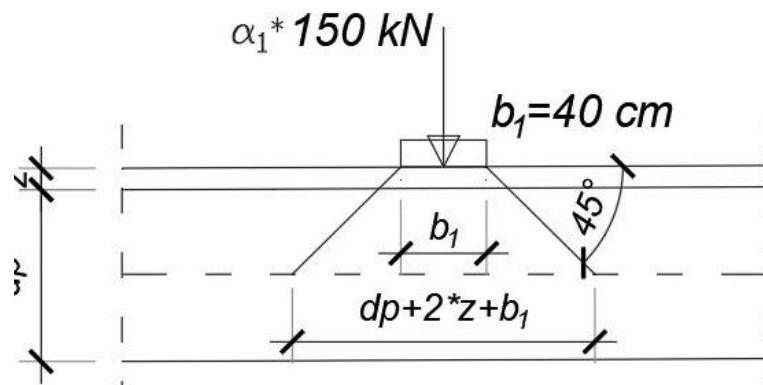
# Распростирање оптерећења од притиска точка на коловозну плочу

Друмски мост са АБ коловозном плочом:

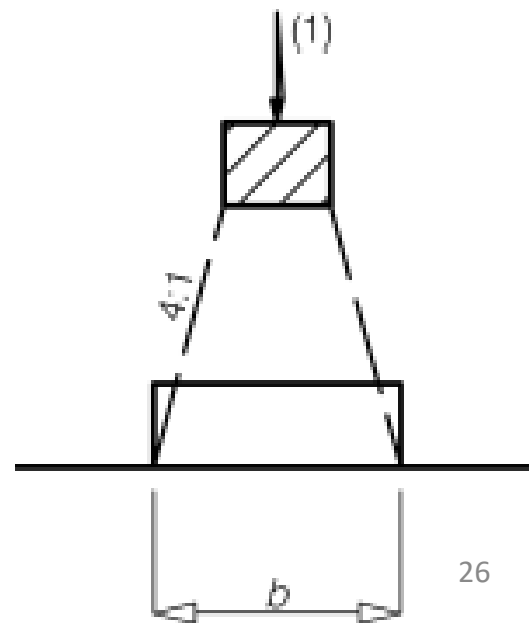
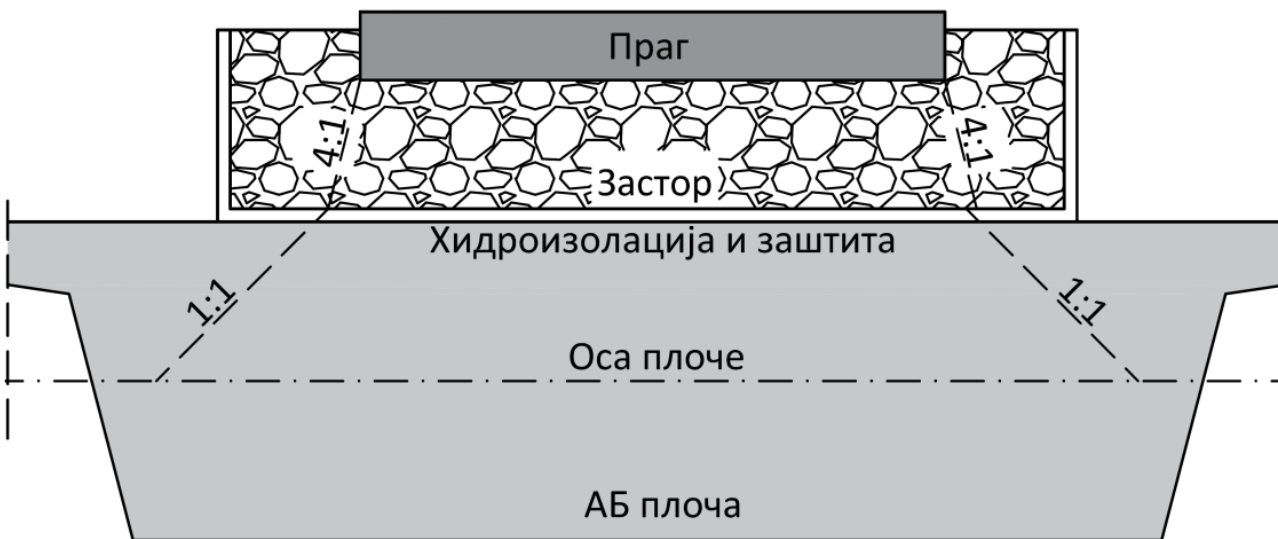


Трака 1 - TS1

У правцу управном на  
правац вожње

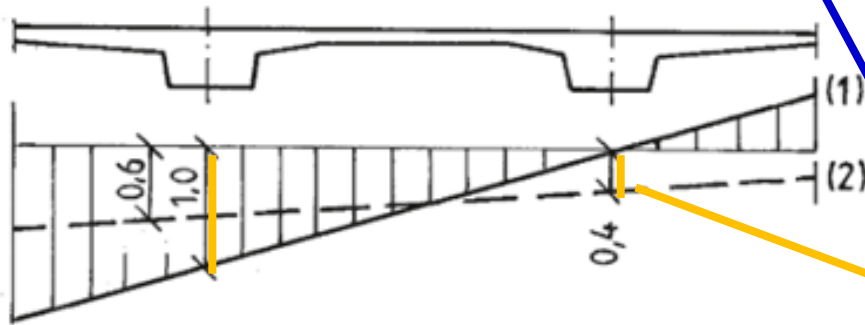


Железнички мост са АБ коловозном плочом:



# ПОПРЕЧНА РАСПОДЕЛА САОБРАЋАЈНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА КОД МОСТОВА СА ДВА ГЛАВНА НОСАЧА

- За широке мостове са два главна носача користи се следећи принцип за попречну прерасподелу саобраћајног оптерећења:
- Одређују се ординате утицајне линије које зависе од ротације попречног пресека као последица **Сентвенанове торзије** и **подужног савијања пресека**.



- 1) у зони ослонаца (попречних носача)
- 2) око средине распона

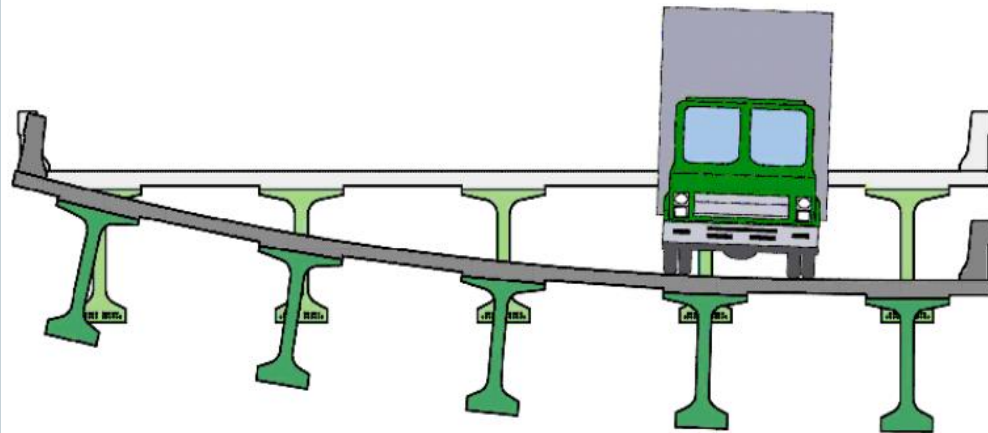
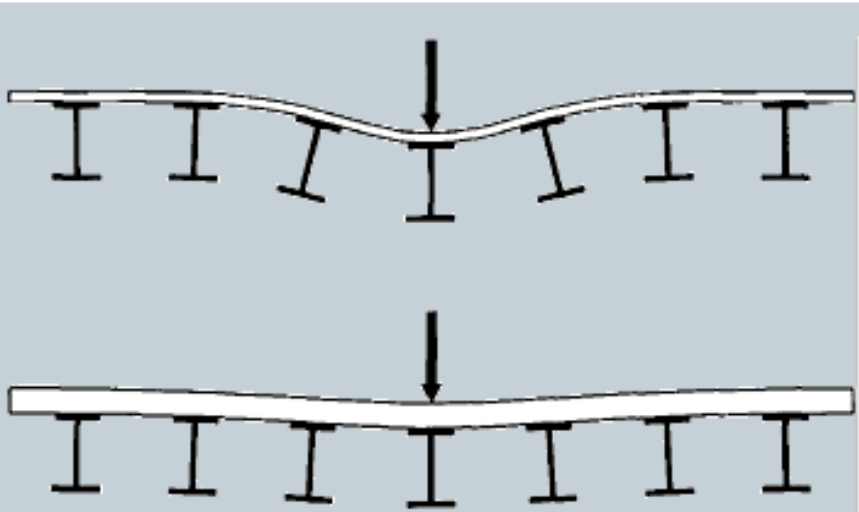
$$\varphi_T = \frac{0,5 \cdot M_T \cdot \frac{L}{2}}{G \cdot I_T} = \frac{M_T \cdot L}{4 \cdot 0,4 \cdot E \cdot I_T} = \frac{M_T \cdot L}{1,6 \cdot E \cdot I_T}$$

$$\varphi_{w0} = \frac{f}{0,5 \cdot b} \quad f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_y}$$

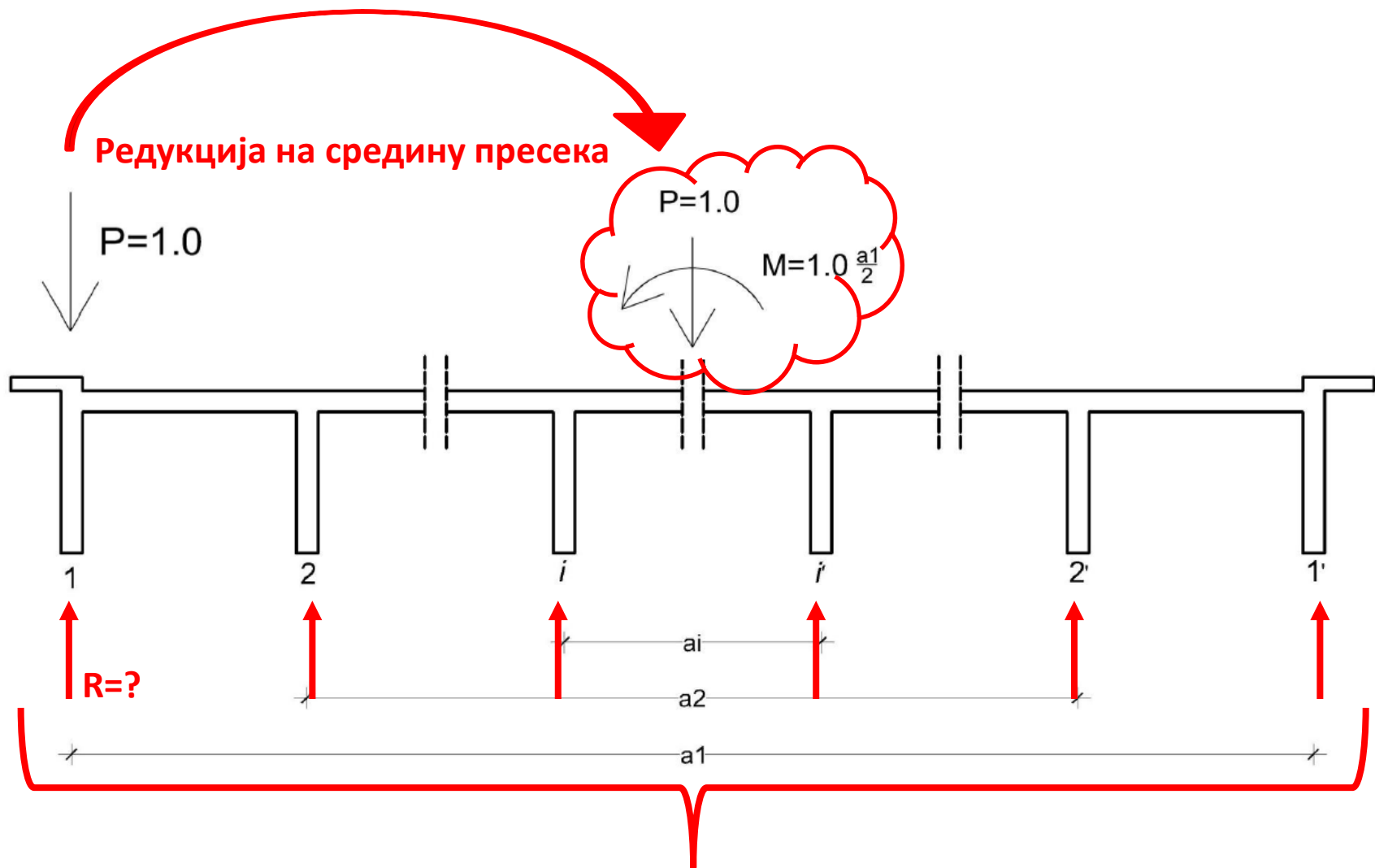
$$\kappa = \frac{\varphi_T}{\varphi_{w0} + \varphi_T} \quad \begin{aligned} \eta &= \eta_s \pm 0,5 \cdot \kappa \\ \rightarrow \eta_1 &= 0,5 + 0,5 \cdot \kappa \\ \eta_2 &= 0,5 - 0,5 \cdot \kappa \end{aligned}$$

# ПОПРЕЧНА РАСПОДЕЛА САОБРАЋАЈНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА КОД МОСТОВА СА ВИШЕ ГЛАВНИХ НОСАЧА

- За широке мостове са **више главних носача** за одређивање попречне прерасподеле користи се **метода Courbon**. Приближна метода која даје задовољавајуће резултате.
- Уводи се претпоставка: **Попречни носачи / коловозна плоча „веома крути“;**
- Утицајне линије попречне прерасподеле су **праве линије** за чије дефинисање су нам потребне две ординате.
- Ординате утицајне линије зависе искључиво од положаја и момента инерције (крутости) носача **(ако су сви носачи исте крутости онда ординате зависе само од растојања!)**



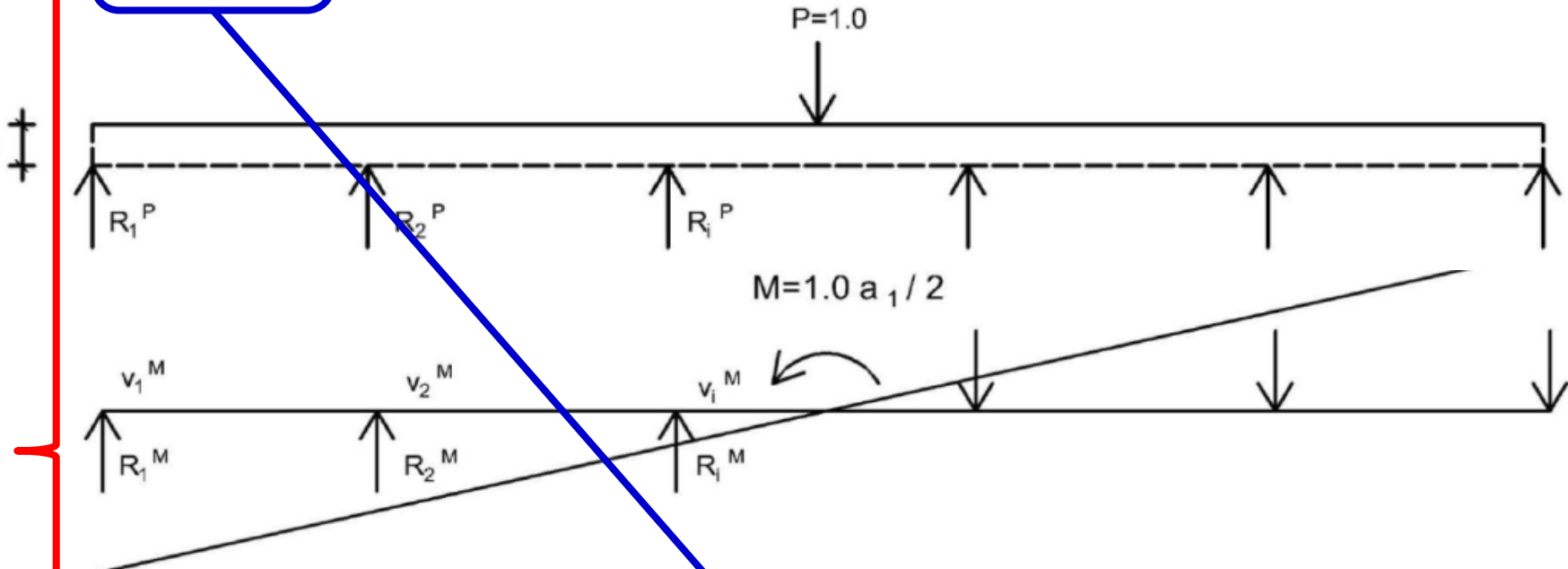
# ПОПРЕЧНА РАСПОДЕЛА САОБРАЋАЈНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА КОД МОСТОВА СА ВИШЕ ГЛАВНИХ НОСАЧА



Вредности реакција представљају ординате  
утицајне линије

Суперпозиција – линеарна анализа

$$R_i^P = \frac{I_i}{\sum I_i}$$



$$R_i^M = R_1^M \frac{a_i I_i}{a_1 I_1} \quad (1)$$

Услов равнотеже  $\sum M = 0 \Rightarrow$

$$R_1^M \times a_1 + R_2^M \times a_2 + R_i^M \times a_i + \dots = \frac{a_1}{2} \quad (2)$$

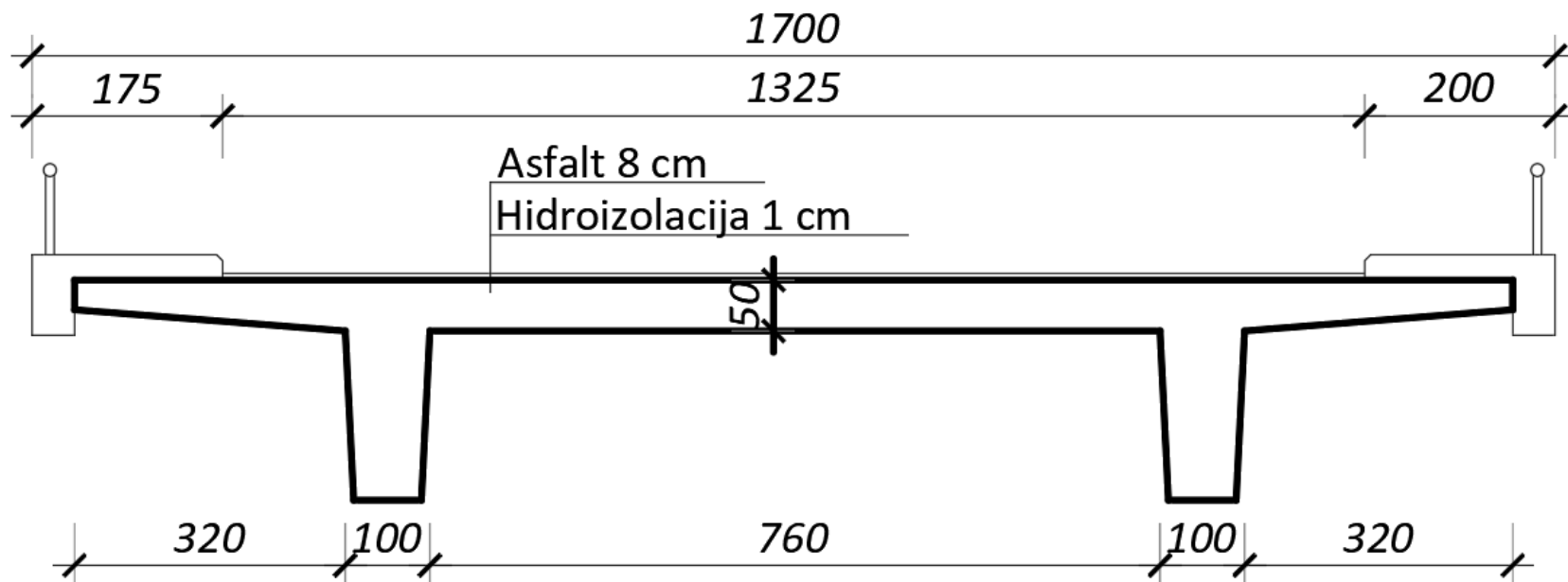
$$R_i^M = \frac{a_1 a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$

$$\eta_{i,k} = \frac{I_i}{\sum I_i} \pm \frac{a_k a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$

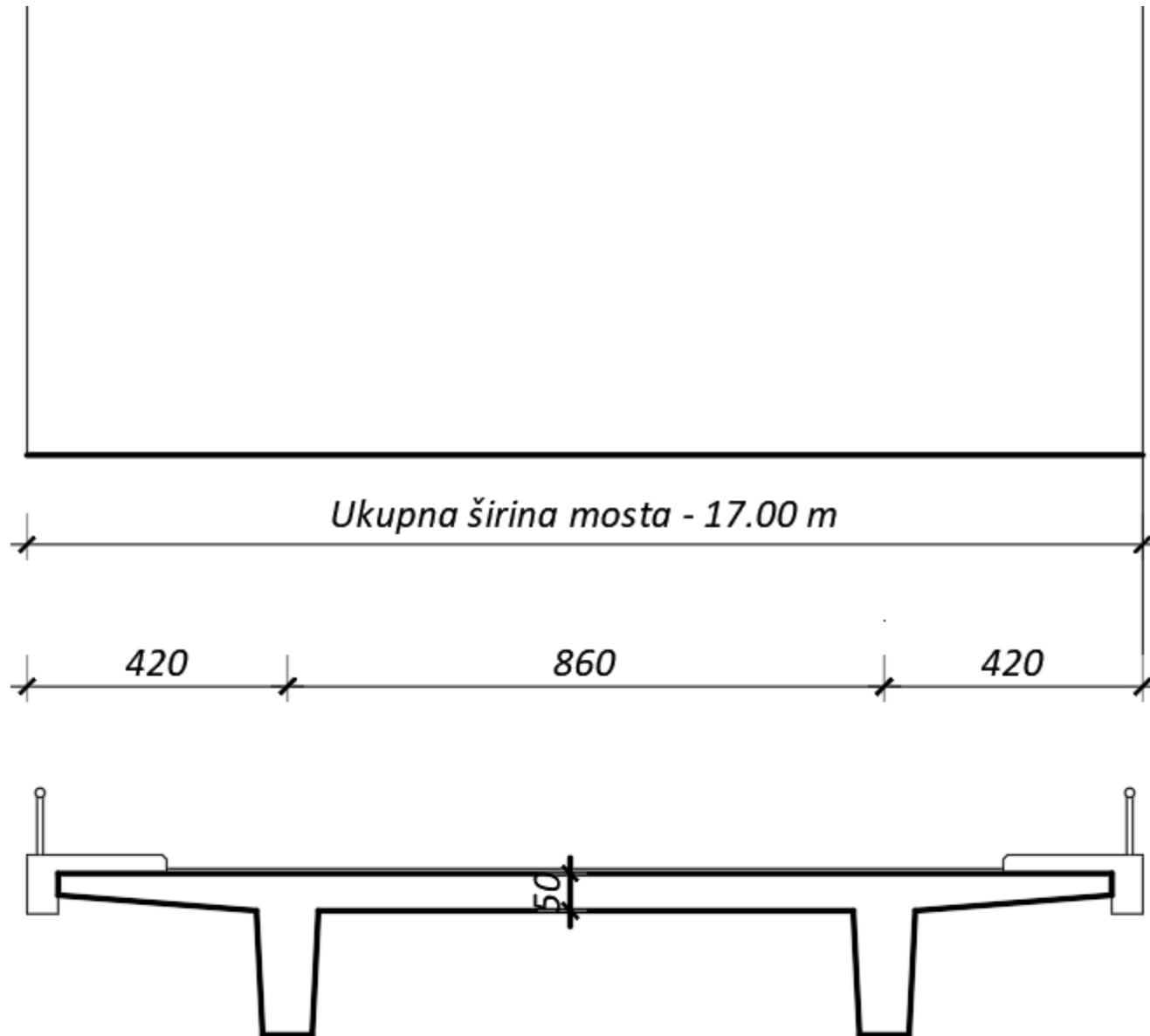
Ординате утицајне линије:

# ПРИМЕР 1 – ШИРОКИ ДРУМСКИ МОСТ СА ДВА ГЛАВНА НОСАЧА

- Одредити линијску шему саобраћајног оптерећења за носач 1 на ребрастом друмском мосту.
- Статички систем проста греда распона 15 m.
- Мост је оптерећен сталним теретом и тежином бетонске ограде од 5.0 kN/m.
- Усвојити шему саобраћајног оптерећења према стандарду Еврокод (EN 1991-2: Дејства на конструкције - Део 2: Саобраћајно оптерећење на мостовима).

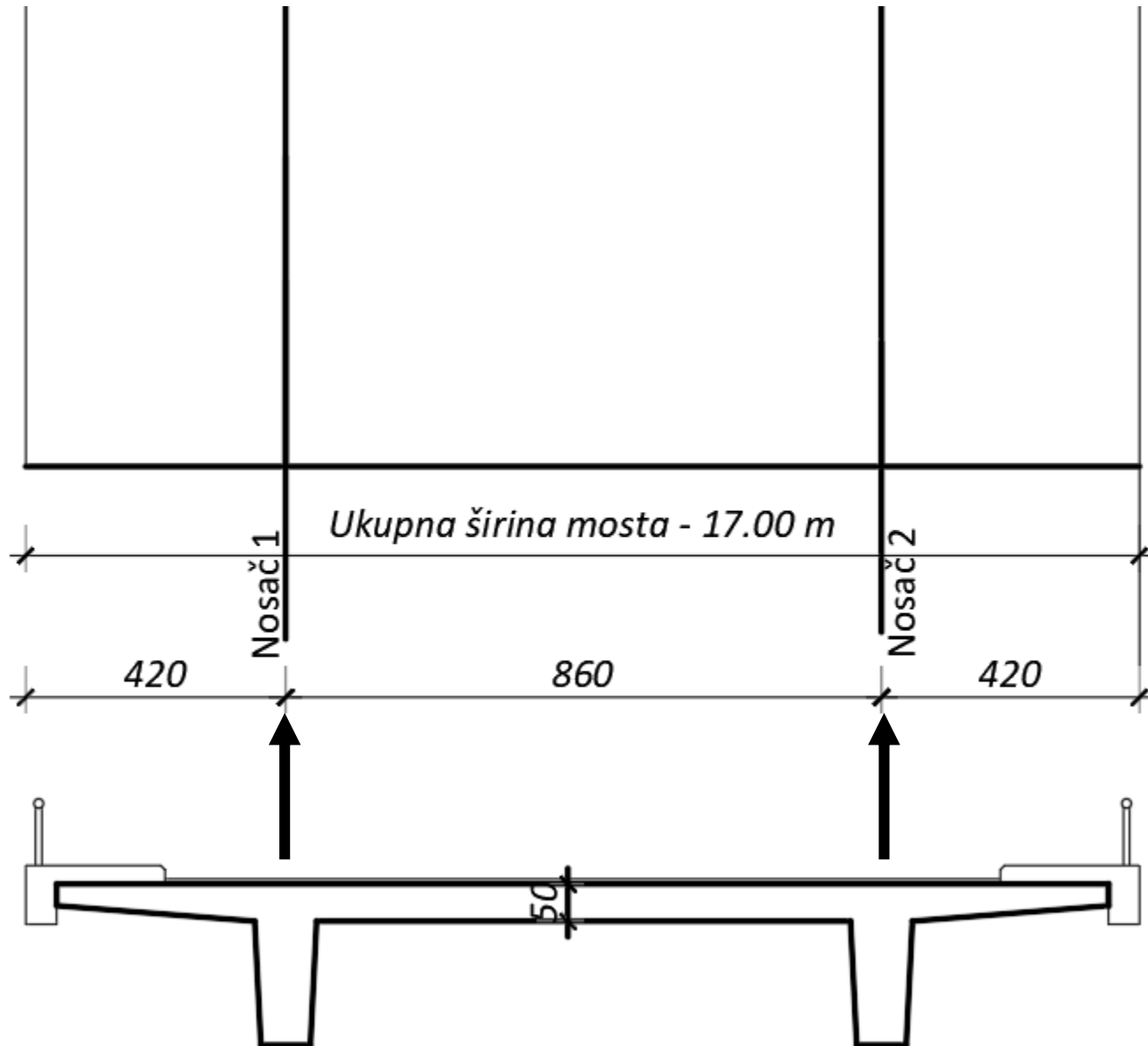


- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: користимо случајеве из праксе (0.6-0.4 и 1.0-0.0).

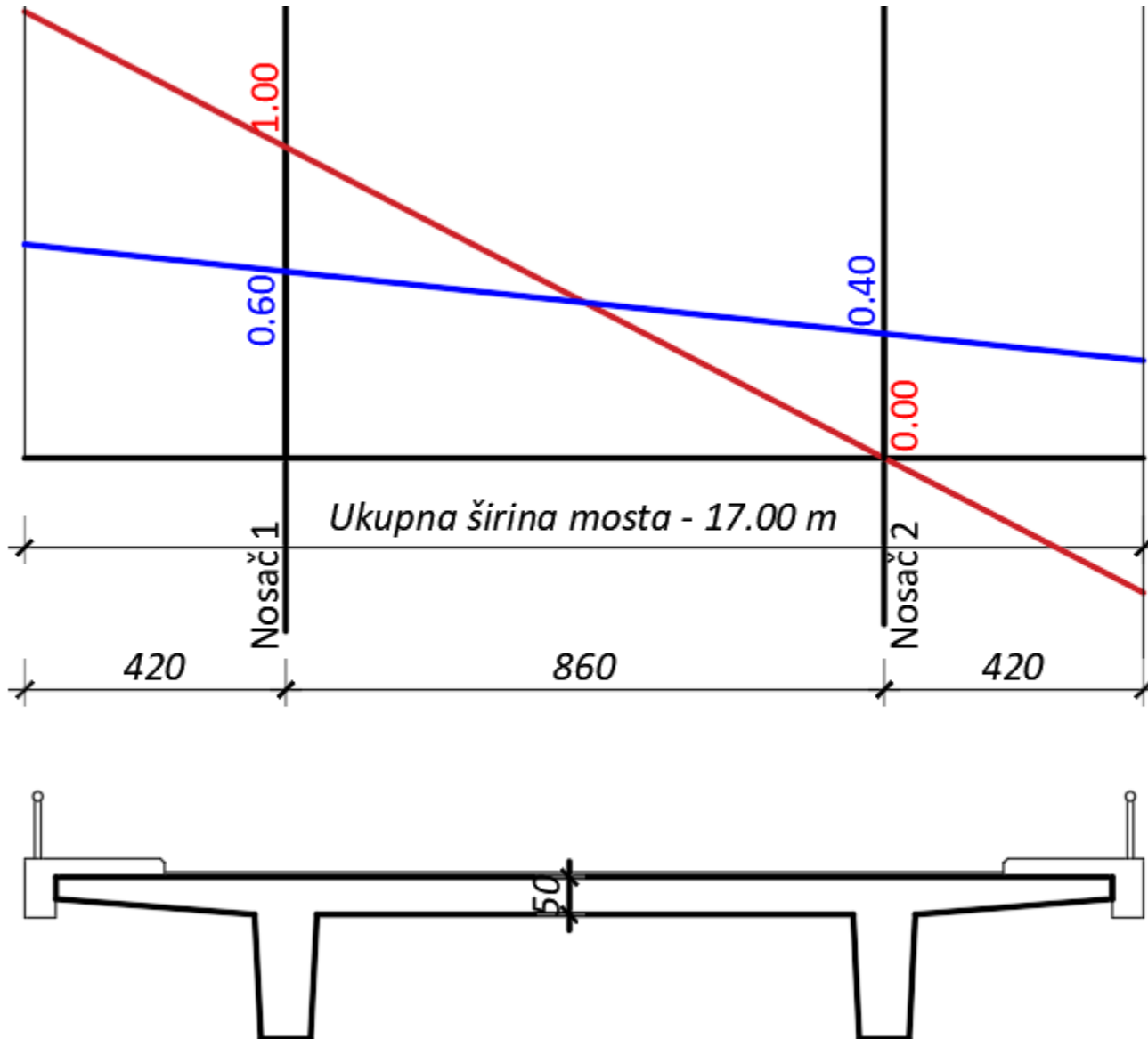




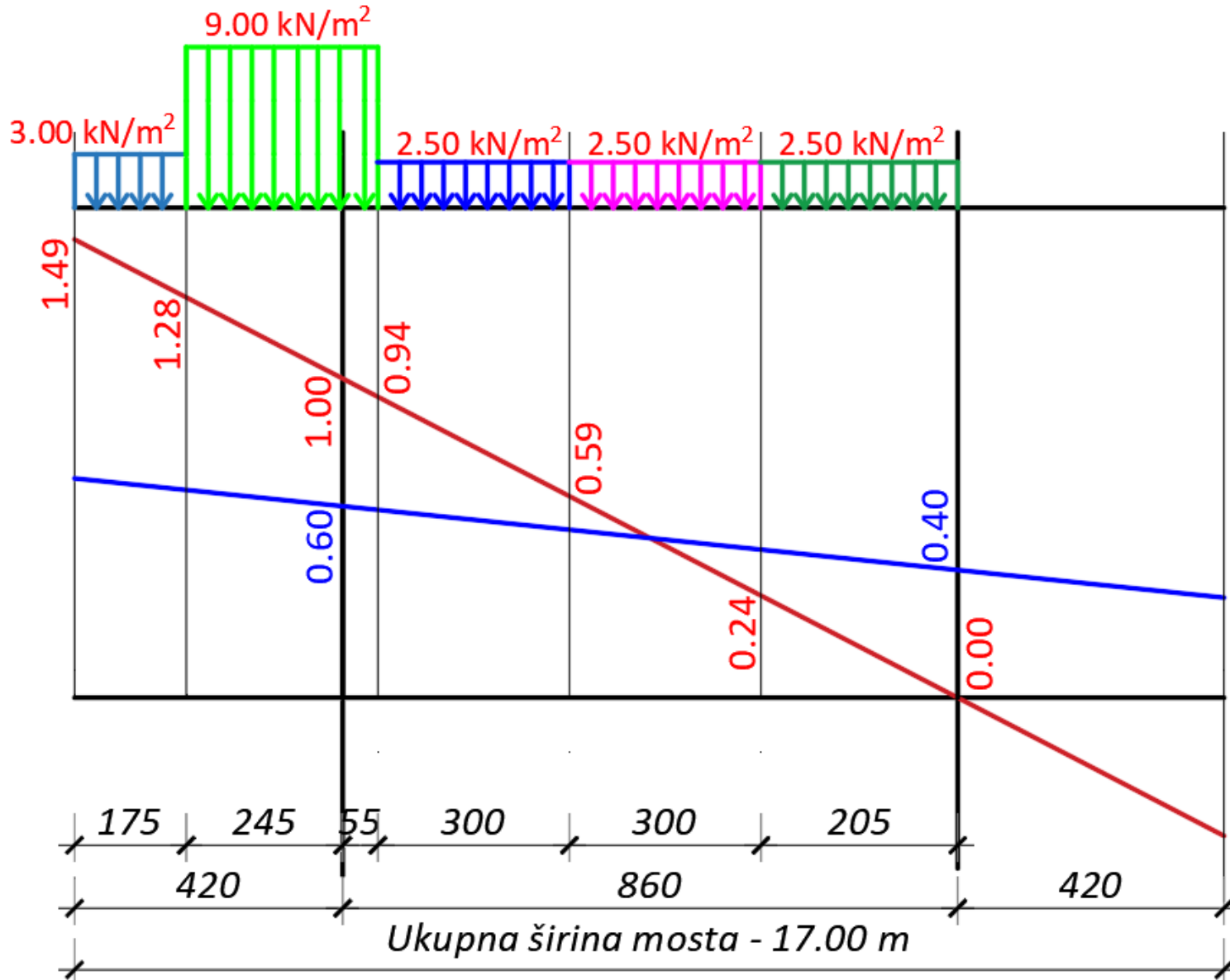
- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: користимо случајеве из праксе (0.6-0.4 и 1.0-0.0).



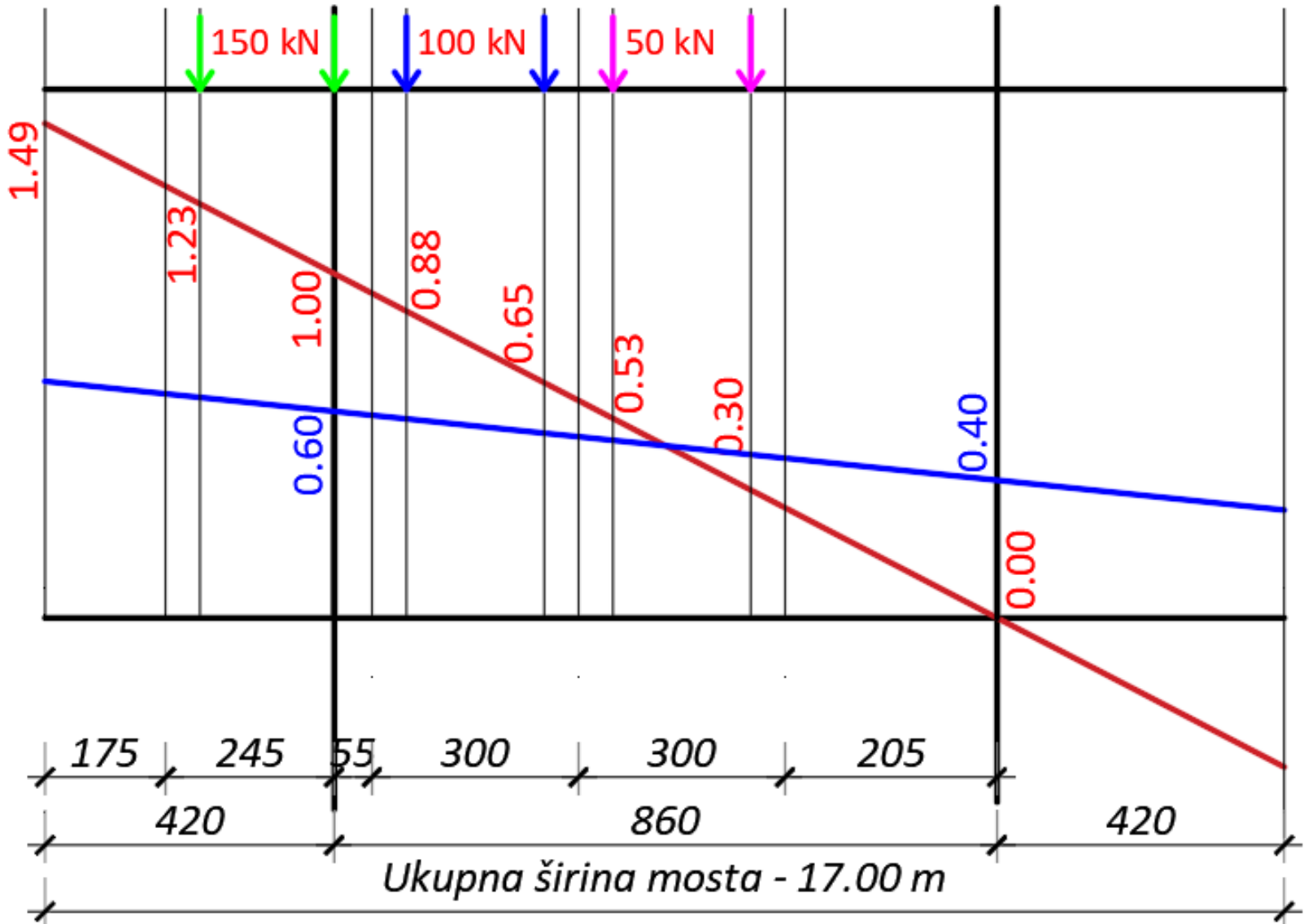
- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: користимо случајеве из праксе (0.6-0.4 и 1.0-0.0).



- Постављамо оптерећење у меродаван положај – **тежимо да оптерећења већег интензитета постављамо изнад већих ордината:**



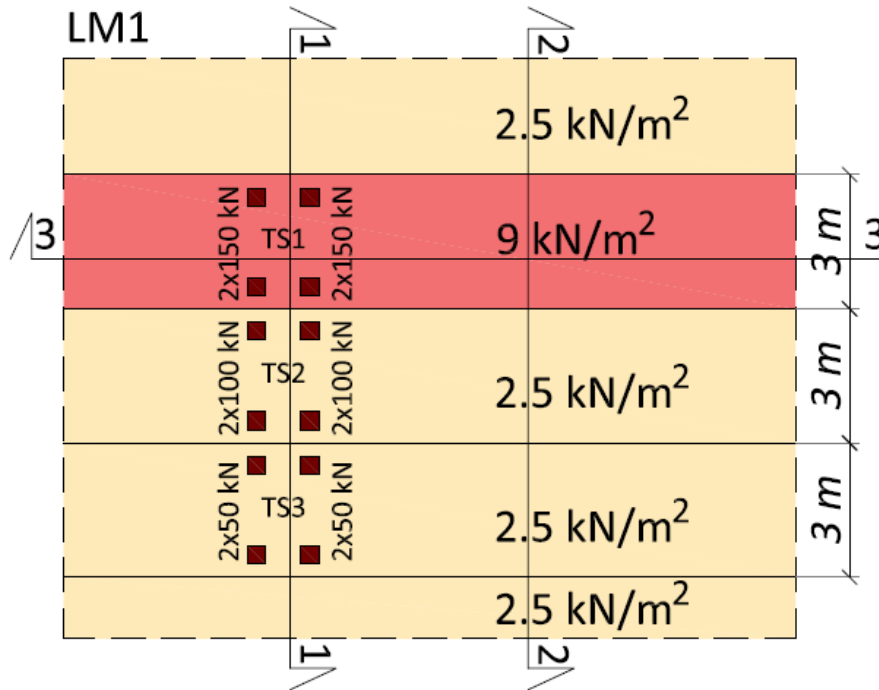
- Постављамо оптерећење у меродаван положај – **тежимо да оптерећења већег интензитета постављамо изнад већих ордината:**



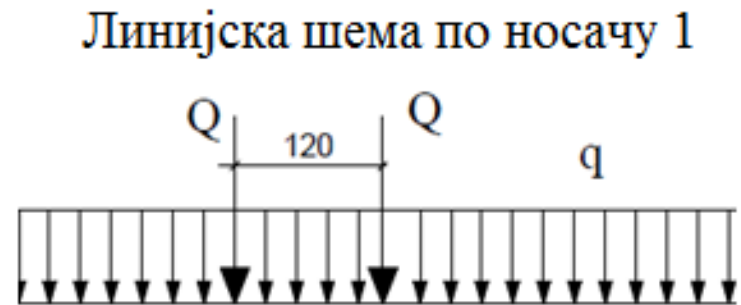
- **Линијска шема саобраћајног оптерећења се састоји од:**

1. Две концентрисане силе **Q** на растојању од **1.20 m** (размак између осовина) које репрезентују тандем систем **TS LM1**;
2. Једнакоподељеног оптерећења **q** деловајући непрекинуто дуж читавог распона које репрезентује површинско оптерећење **UDL LM1**.

- Добијена шема оптерећења се поставља у **подужном правцу**, дуж распона у **меродаван положај**, у зависности од врсте утицаја који се одређује (утицајне линије!)



Плочаст систем



Гредни систем

- **Линијска шема саобраћајног оптерећења се састоји од:**

1. Две концентрисане силе **Q** на растојању од **1.20 m** (размак између осовина) које репрезентују тандем систем **TS LM1**;
  2. Једнакоподељеног оптерећења **q** деловајући непрекинуто дуж читавог распона које репрезентује површинско оптерећење **UDL LM1**.
- Добијена шема оптерећења се поставља у **подужном правцу**, дуж распона у **меродаван положај**, у зависности од врсте утицаја који се одређује (утицајне линије!)


За расподелу **1.00-0.00**:

$$q = 3 \cdot 1.75 \cdot (1.49 + 1.28) / 2 + 9 \cdot (1.28 + 0.94) / 2 + 2.50 \cdot (0.94 + 0.24) / 2 + 2.50 \cdot 2.05 \cdot 0.24$$
$$q = 46.71 \text{ kN/m}$$

$$q = 150 \cdot (1.23 + 1.00) + 100 \cdot (0.88 + 0.65) + 50 \cdot (0.53 + 0.30)$$
$$q = 529 \text{ kN}$$

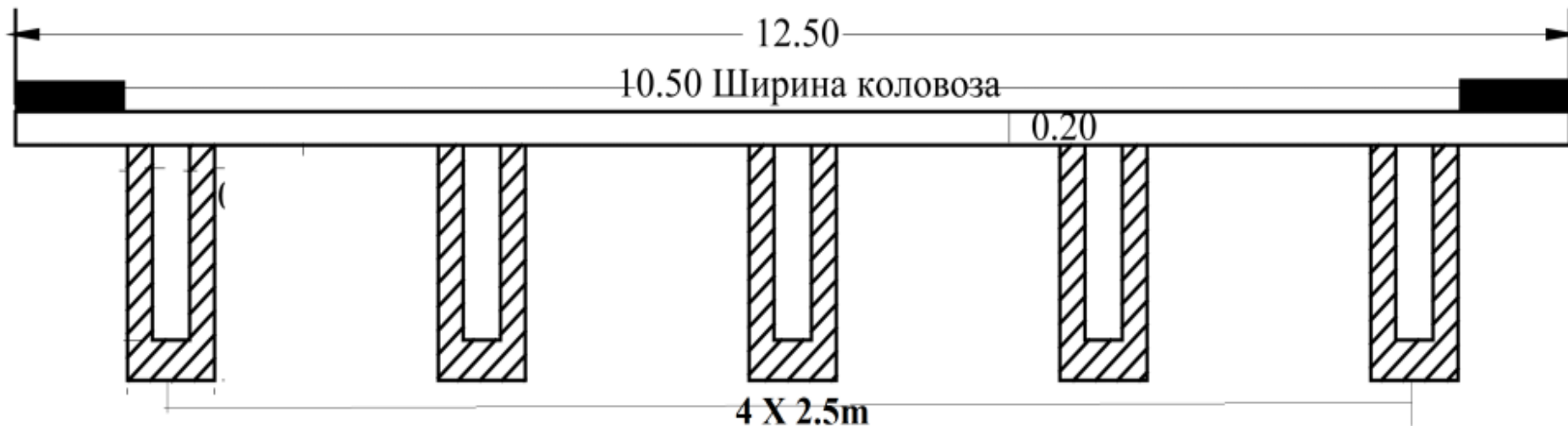
За расподелу **0.60-0.40**:

Положај оптерећења је исти (зашто?)

*Урадити за домаћи* 

# ПРИМЕР 2 – ШИРОКИ ДРУМСКИ МОСТ СА ВИШЕ ГЛАВНИХ НОСАЧА

- Одредити линијску шему саобраћајног оптерећења за ивични носач на ребрастом друмском мосту.
- Статички систем проста греда распона 20 m.
- Дужина конзолних делова плоче 1.00 m.
- Мост је оптерећен сталним теретом и тежином бетонске ограде од 5.0 kN/m.
- Дебљина асфалта је 8 cm и хидроизолације 1 cm.
- Усвојити шему саобраћајног оптерећења према стандарду Еврокод (EN 1991-2: Дејства на конструкције - Део 2: Саобраћајно оптерећење на мостовима).



• **Ивични носач:**

$$\eta_{1,1} = \frac{1}{5} + \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.6 ;$$

$$\eta_{1,5} = \frac{1}{5} - \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = -0.2$$

• **Унутрашњи носач:**

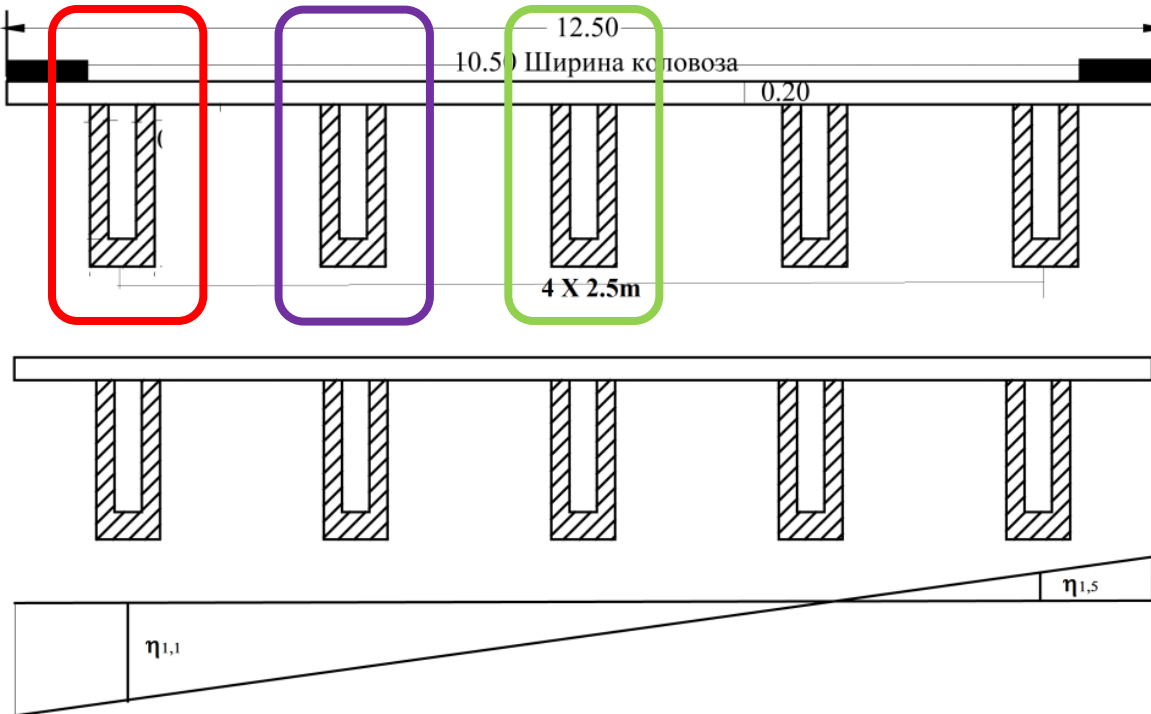
$$\eta_{2,1} = \frac{1}{5} + \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.4 ;$$

$$\eta_{2,5} = \frac{1}{5} - \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0$$

• **Средњи носач:**

$$\eta_{3,1} = \frac{1}{5} + \frac{0 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.2 ;$$

$$\eta_{3,5} = \frac{1}{5} - \frac{0 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.2$$



**Носачи идентичног попречног пресека!**

$$\eta_{i,k} = \frac{I_i}{\sum I_i} \pm \frac{a_k a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$



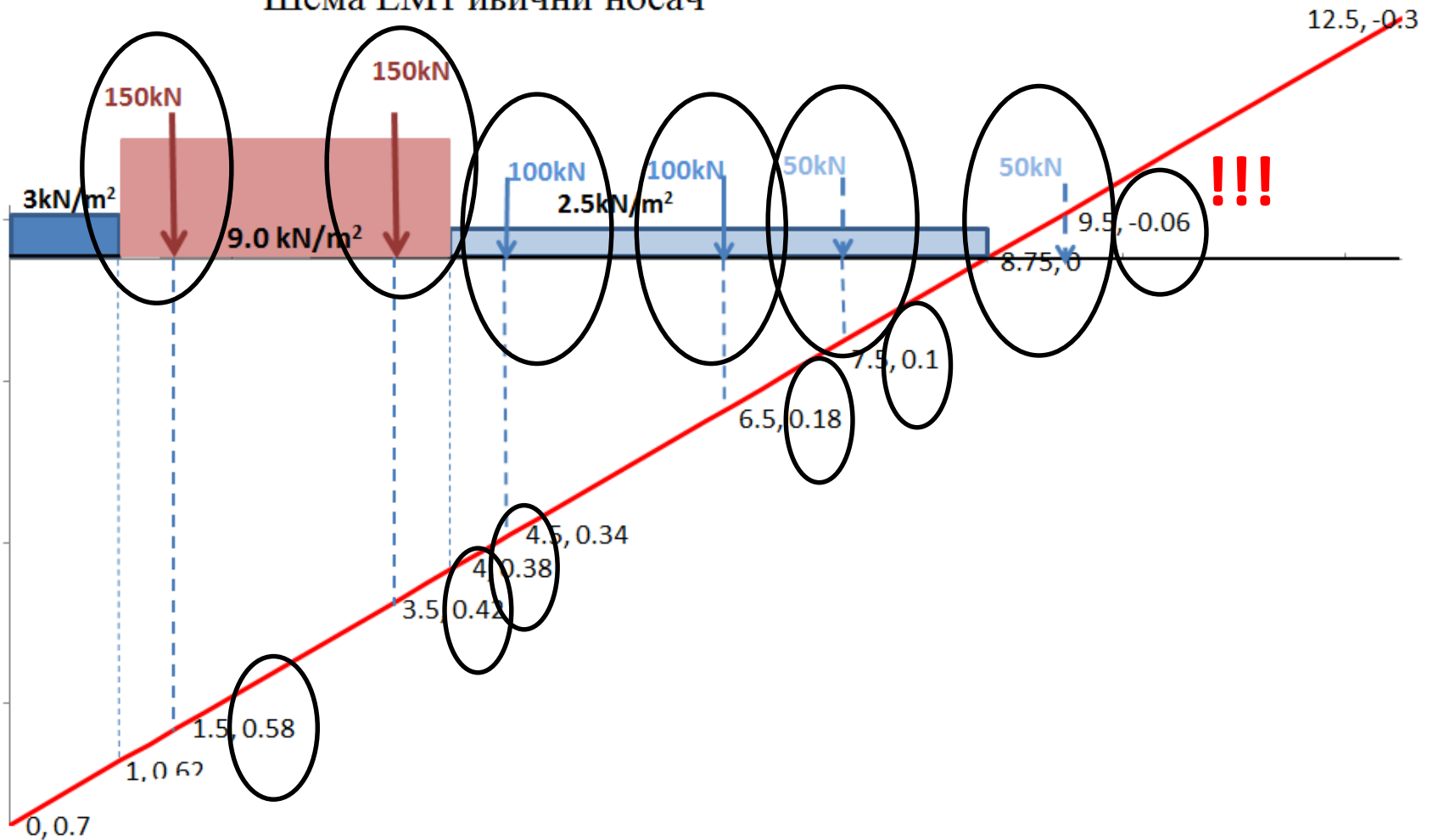
**КОЛИЧНИК БРОЈА НОСАЧА**

**КОЛИЧНИК РАСТОЈАЊА**



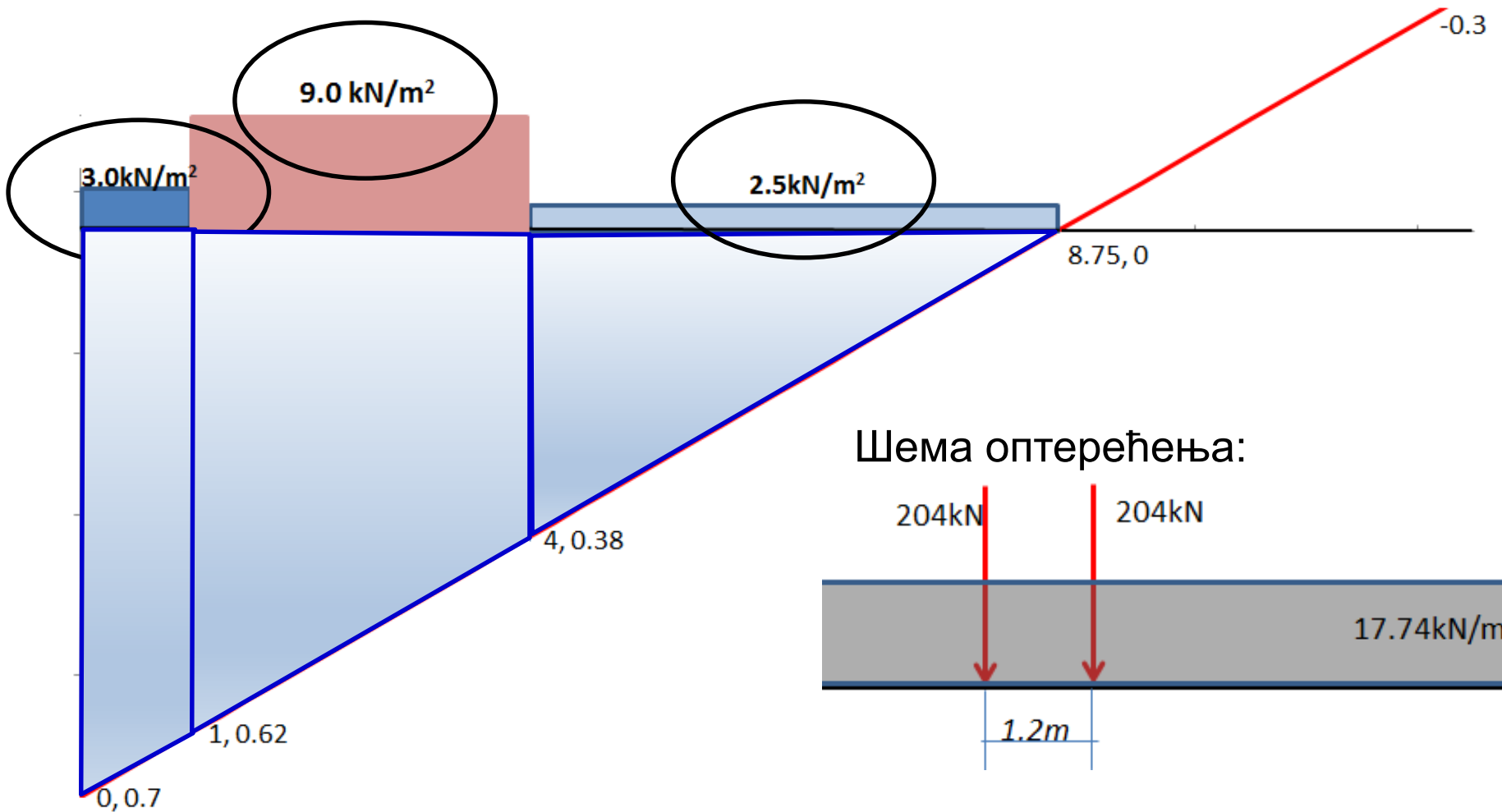
- Одређујемо вредност силе **Q** у линијској шеми оптерећења која репрезентује **тандем систем**:

Шема LM1 ивични носач

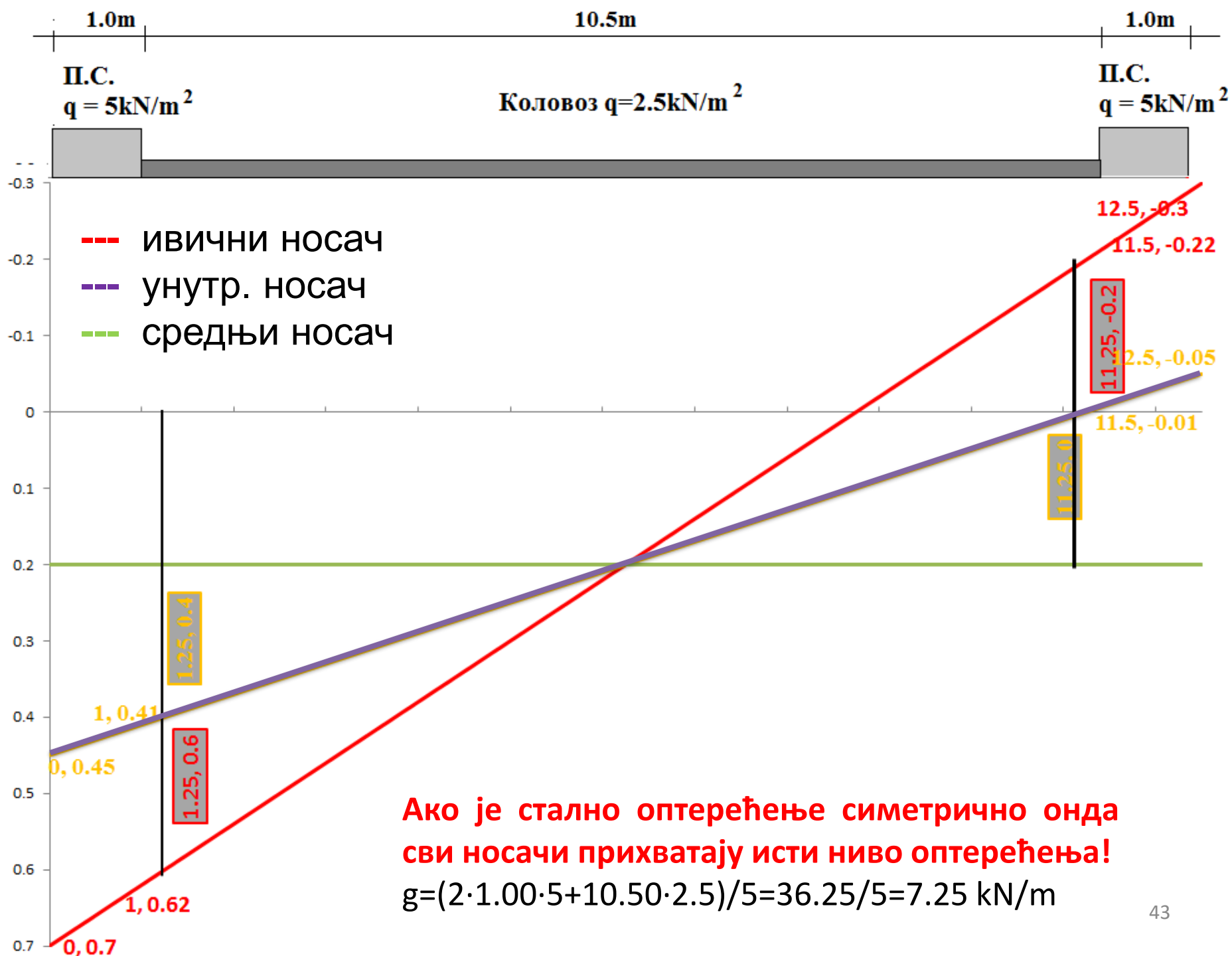


$$Q = 150 \cdot 0.58 + 150 \cdot 0.42 + 100 \cdot 0.34 + 100 \cdot 0.18 + 50 \cdot 0.10 + 50 \cdot (-0.06) = 204 \text{ kN}$$

- Одређујемо вредност оптерећења  $q$  у линијској шеми оптерећења која репрезентује **површинско оптерећење**:



$$q = 3 \cdot 1 \cdot (0.7 + 0.62) / 2 + 9 \cdot 3 \cdot (0.62 + 0.38) / 2 + 2.50 \cdot 4.75 \cdot 0.38 / 2 = 17.74 \text{ kN/m}$$



# ПОПРЕЧНА ПРЕРАСПОДЕЛА САОБРАЋАЈНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА КОД ЖЕЛЕЗНИЧКИХ МОСТОВА

- Саобраћајно оптерећење код железничких мостова се не може „шетати“ у попречном правцу моста.
- Оптерећење у виду кретања воза делује по колосеку чији је положај тачно дефинисан на попречном пресеку моста.
- **За случај моста са једноколосечном железницом сви главни носачи прихватају исти ниво оптерећења (оптерећење је симетрично у односу на попречни пресек).**
- **За случај моста са вишеколосечном железницом потребни је за разматрани носач вредност оптерећења одредити уз помоћ утицајне линије за разматрани носач (оптерећење није симетрично у односу на попречни пресек).**