

## 5. SISTEMI SA VIŠE STEPENI SLOBODE

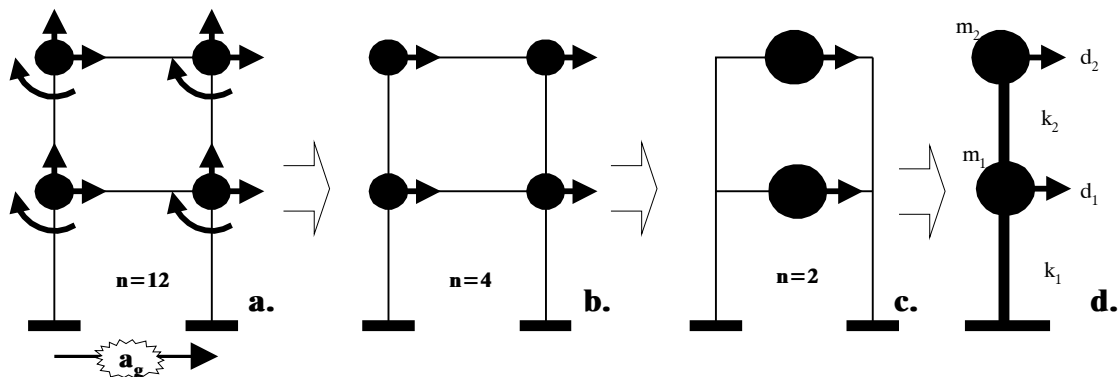
### UVOD

Sva dosadašnja razmatranja odnosila su se na sistem sa jednim stepenom slobode. Sistemi sa više masa - stepeni slobode su naravno najčešći u praksi. Elastični odgovor ovakvih sistema obično se analizira primenom *multi-modalne analize*, koja se zasniva na principu superpozicije uticaja. Međutim, u nelinearnim problemima princip superpozicije ne važi. U narednom poglavlju, prethodno razvijena rešenja za sistem sa jednim stepenom slobode se generalizuju i na složenije sisteme, pod određenim uslovima. U nastavku, analiziraju se elasto-plastični modeli složenih konstrukcija - *plastični mehanizmi*, kao i koncept obezbeđenja pouzdanog mehanizma pri zemljotresu - koncept *programiranog ponašanja*. Informativno, prikazani su i koncepti pojednostavljenih metoda nelinearne statičke analize.

### 5.1 REKAPITULACIJA OSNOVNIH POJMOVA IZ DINAMIKE KONSTRUKCIJA

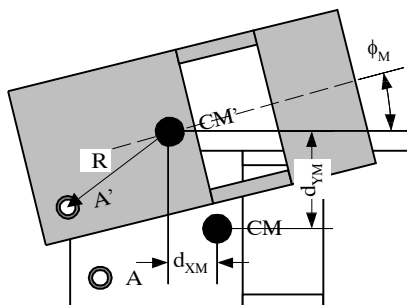
U realnim konstrukcijama mase su *raspodeljene u prostoru*, formalno se može govoriti o beskonačnom broju stepeni slobode.

Nakon što je realna masa konstrukcije *koncentrisana u čvorovima*, dvoetažni okvir u ravni na slici 5.1.a predstavlja model sa 12 stepeni slobode. Ako se eliminišu *nebitni stepeni slobode* - vertikalne oscilacije masa kao i njihova rotacija, dobija se sistem sa četiri stepena slobode - horizontalne translacije, slika 5.1.b.



Slika 5.1 Redukcija broja stepeni slobode

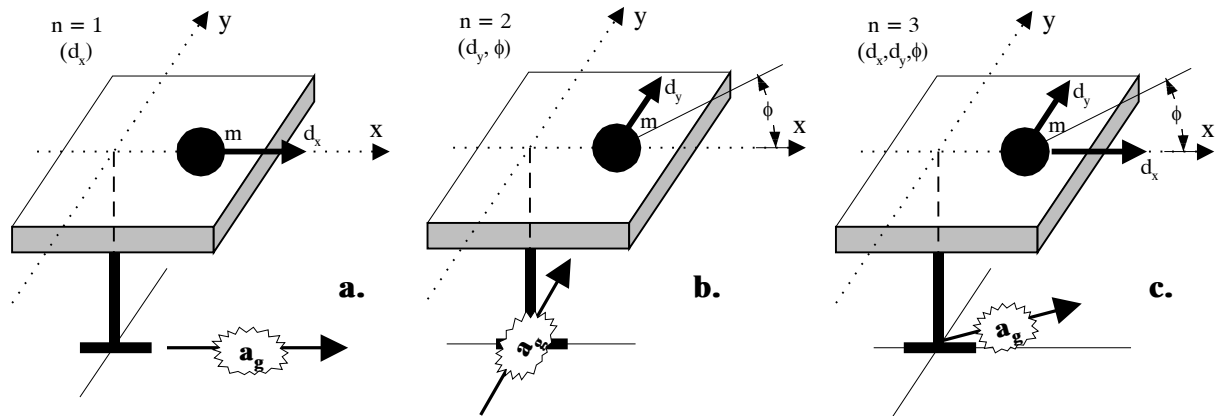
Ukoliko su grede okvira i tavanica *kruti u svojoj ravni*, tada su pomeranja masa iste etaže jednaka, pa se broj stepeni slobode svodi na dva *nezavisna spratna pomeranja*, slika 5.1.c-d. Broj stepeni slobode jednak je *broju etaža* konstrukcije.



Slika 5.2 Pomeranja krute tavanice

U slučaju prostornih konstrukcija zgrada, ukoliko su tavanice dovoljno krute u svojoj ravni, pomeranja svih elemenata vezanih sa tavanicom mogu da se izraze preko tri komponente pomeranja, dve translacije i rotacija neke karakteristične tačke u ravni tavanice, obično centra mase  $CM$ , slika 5.2. Ukoliko objekat ima  $n$  - etaža, i ukoliko se masa objekta koncentriše samo u nivou tavanica, ukupan broj stepeni slobode prostorne konstrukcije iznosi samo  $N=3n$ .

Da broj stepeni slobode može da zavisi i od *pravca dejstva pobuđivača*, ilustrovano je na slici 5.3. Ukoliko ubrzanje tla deluje u ravni simetrije, kretanje sistema može da se opiše jednim pomeranjem  $d_x$ , slika 5.3.a. Ukoliko je smer pobude u pravcu  $y$  - ose sistema, za opisivanje kretanja potrebna su dve veličine, translacija  $d_y$  i rotacija mase  $\phi$ . U opštem slučaju, slika 5.3.c, za opisivanje kretanja jedne mase potrebne su tri komponente pomeranja - stepena slobode.

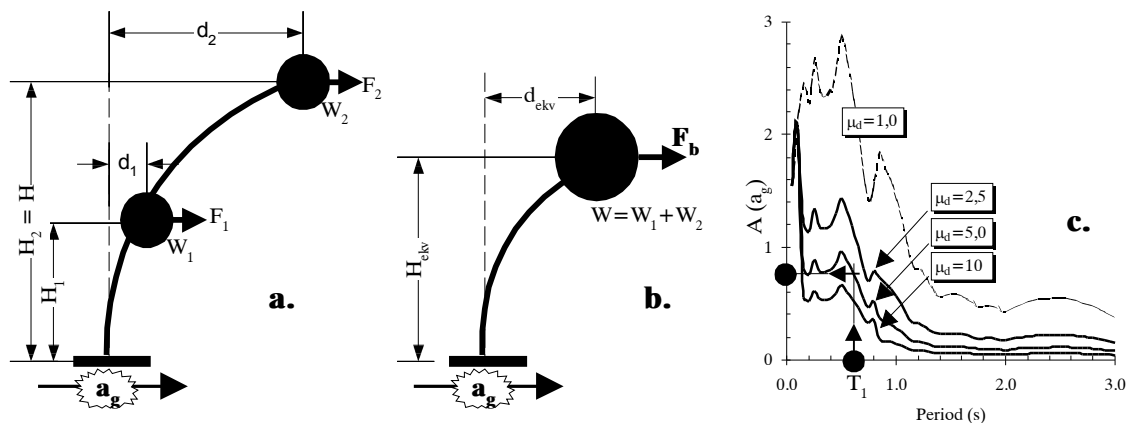


Slika 5.3 Uticaj pravca pobude na broj stepeni slobode

Elastični sistemi sa više stepeni slobode u praksi se najčešće rešavaju primenom *multi-modalne analize*, sa uzimanjem u obzir uticaja više *relevantnih tonova oscilacija*. Ukupni rezultati dobijaju se kombinovanjem rezultata uticaja pojedinih tonova, primenom *SRSS* metode ("kvadratni koren sume kvadrata") na primer.

## 5.2 UPROŠĆENA MODALNA SPEKTRALNA ANALIZA

U slučaju konstrukcija čija je dispozicija *regularna* kako u osnovi tako i po visini, većina *propisa* pojednostavljuje problem dozvoljavanjem primene *uprošćene modalne analize*. Osnovna pretpostavka je da *ukupna masa sistema osciluje samo u prvom, osnovnom tonu*, čiji period i oblik oscilovanja dovoljno tačno opisuju kretanje sistema, slika 5.4.a.



Slika 5.4 Uprošćena modalna analiza

Realni sistem sa više masa, težina spratova  $W_i$  koji osciluje u prvom tonu, slika 5.4.a, može da se zameni *ekvivalentnim sistemom sa jednim stepenom slobode*, čija je masa  $m$  jednaka ukupnoj masi realnog sistema, i koji ima isti period oscilovanja  $T_1$ , slika 5.4.b.

Kako su periodi i masa jednaki, oba sistema imaju jednako *proračunsko pseudo ubrzanje*  $A(a_g)$ . Ukupna seizmička sila  $F_b$  takođe je identična

$$F_b = m a_g A(a_g) = W a_g A / g \quad (5.1)$$

Ubrzanja  $A_i$  pojedinih masa realnog sistema se razlikuju, najveća pseudo ubrzanja ima masa na vrhu, sa najvećim pomeranjem  $d$

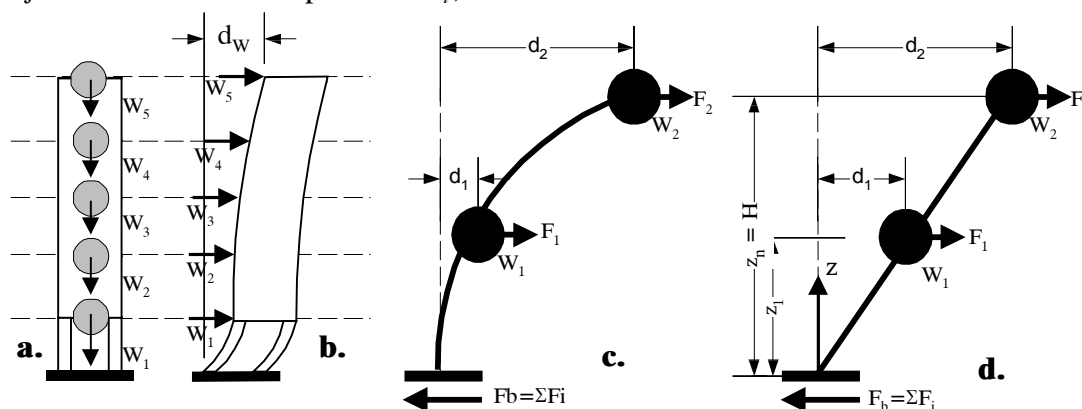
$$A_i = \omega^2 d_i \quad (5.2)$$

Da bi pri istoj krutosti  $EI$  na savijanje, a sa masom jednakom ukupnoj masi objekta  $m$ , ekvivalentni sistem imao isti period oscilovanja  $T_1$ , visina  $H_{ekv}$  ekvivalentnog sistema mora da je manja od ukupne visine realne konstrukcije  $H$ , i okvirno se kreće u granicama  $H_{ekv} \approx 0,7H$ . Zbog toga pomeranje  $d_{ekv}$  ekvivalentnog sistema nije jednako *pomeranju vrha* realne konstrukcije, koje je približno 50% veće. O ovome treba voditi računa kod upotrebe *spektra pomeranja*, slika 2.7.b.

Period oscilovanja u prvom tonu može da se približno odredi preko pojednostavljene Rejlijeve relacije [13/

$$T_1 = 2\sqrt{(d_w)} \quad (5.3)$$

gde je  $d_w$  pomeranje, u metrima, vrha konstrukcije usled opterećenja horizontalnim silama jednakim težinama spratova  $W_i$ , slika 5.5.a-b.



Slika 5.5 Period oscilovanja i raspodela seizmičkog opterećenja

Raspodela ukupne seizmičke sile  $F_b$  po pojedinim masama - etažama može da se izvrši *prema pomeranjima*  $d_i$  pojedinih spratova, slika 5.5.c.

$$F_i = F_b \frac{W_i d_i}{\sum_j W_j d_j} \quad (5.4)$$

Međutim, u fazi proračuna seizmičkog opterećenja, pomeranja spratova još uvek nisu određena. Dovoljno je tačno ako se usvoji *oblik pomeranja* koji fizički ima smisla - korektni konturni uslovi, ili poznati dijagram pomeranja od nekog drugog opterećenja, recimo od težina spratova prema slici 5.5.b.

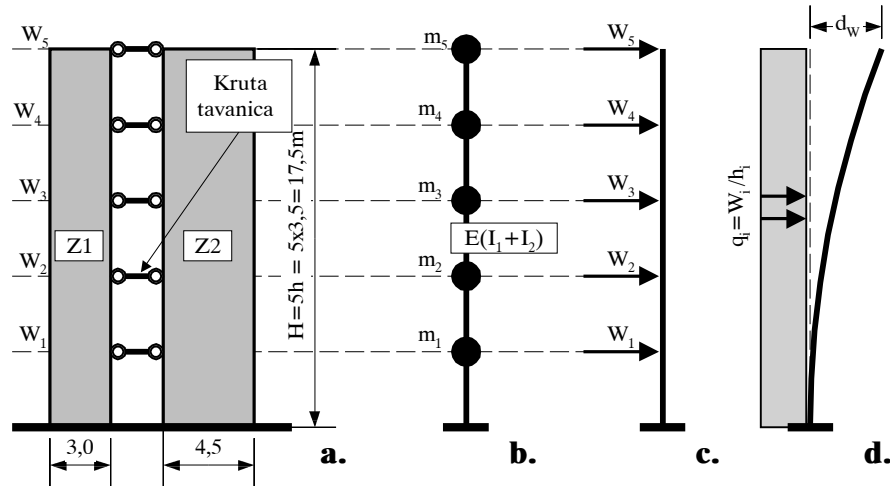
Imajući u vidu ukupnu tačnost postupka, dozvoljava se i pretpostavka da se pomeranja menjaju linearno sa visinom, slika 5.5.d, u kom slučaju sile spratova iznose

$$F_i = F_b \frac{W_i z_i}{\sum_j W_j z_j} \quad (5.5)$$

gde su z vertikalne koordinate spratova u odnosu na uklještenje modela.

**Primer 5.1.....**

Sračunati period oscilovanja konstrukcije sa dva AB zida, slika 5.6.a. Težine svih etaža su jednake  $W=3924 \text{ kN}$ . Debljina zidova  $b_w=15\text{cm}$ . Moduo elastičnosti  $E_b=3 \cdot 10^7 \text{ kNm}^{-2}$ .



Slika 5.6 Određivanje perioda a) dispozicija, b) dinamički model c) fiktivno opterećenje d) proračunski model

$$I_1 = 0,15 \times 3^3 / 12 = 0,3375 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,15 \times 4,5^3 / 12 = 1,139 \text{ m}^4$$

$$\Sigma I = I_1 + I_2 = 0,3375 + 1,139 = 1,476 \text{ m}^4$$

$$W_j = W = 3924 \text{ kN}$$

$$q = W/h = 3924/3,5 = 1121,1 \text{ kN/m}$$

$$d_w = qH^4 / 8E\Sigma I = 1121,1 \times 17,5^4 / 8 \times 3 \times 10^7 \times 1,476 = 0,296 \text{ m}$$

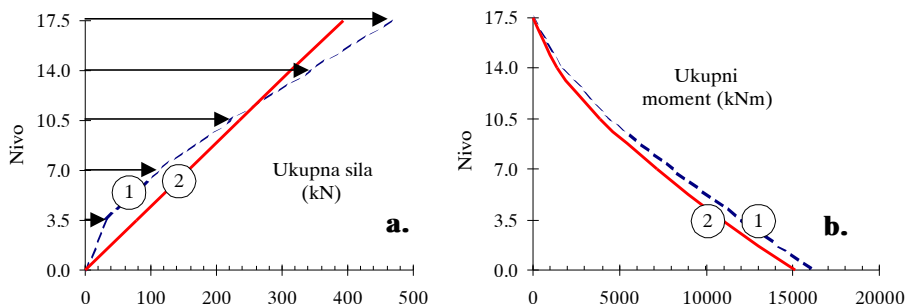
$$T = 2\sqrt{0,296} = 1,08 \text{ s}$$

**Primer 5.2.....**

Uz pretpostavku da je ukupno seizmičko opterećenje 5% težine objekta iz prethodnog primera, odrediti raspodelu ukupnog opterećenje po visini: prema pomeranjima usled težina spratova i prema linearnoj raspodeli.

Nivo - j	z	$\xi = 1-z/H$	$W_j$	$d_j$	$W_j d_j$	$F_j$	$V_j$	$M_j$
	m		kN	m	kNm	kN	kN	kNm
5	17.5	0.00	3924	0.296	1161.5	466.7	466.7	0.0
4	14.0	0.20	3924	0.217	852.4	342.5	809.3	1633.6
3	10.5	0.40	3924	0.141	551.9	221.8	1031.1	4466.1
2	7.0	0.60	3924	0.072	282.5	113.5	1144.6	8074.9
1	3.5	0.80	3924	0.021	81.2	32.6	1177.2	12080.9
0	0.0	1.00	3924	0.000	0.0	0.0	1177.2	16201.1
$\Sigma =$			23544		2929.5	1177.2		

Tabela 5.1



Slika 5.7 a) Raspodela sila i b) dijagrami momenata savijanja

Rezultati proračuna raspodele opterećenja prema pomeranjima prikazani su u Tabeli 5.1 i na slici 5.7, linija 1. Pomeranja konzole usled podeljenog opterećenja  $q$  iznosi  $d(\xi) = d_w/3(3-4\xi+4\xi^4)$  gde je  $d_w$  pomeranje vrha iz Primera 5.1.

Nivo - j	z	W <sub>j</sub>	W <sub>j</sub> z <sub>j</sub>	F <sub>j</sub>	V <sub>j</sub>	M <sub>j</sub>
	m	kN	kNm	kN	kN	kNm
5	17.50	3924	68670	392.4	392.4	0
4	14.00	3924	54936	313.9	706.3	1373.4
3	10.50	3924	41202	235.4	941.8	3845.52
2	7.00	3924	27468	157.0	1098.7	7141.68
1	3.50	3924	13734	78.5	1177.2	10987.2
0	0.00	3924	0	0.0	1177.2	15107.4
Σ=		23544.0	206010	1177.2		

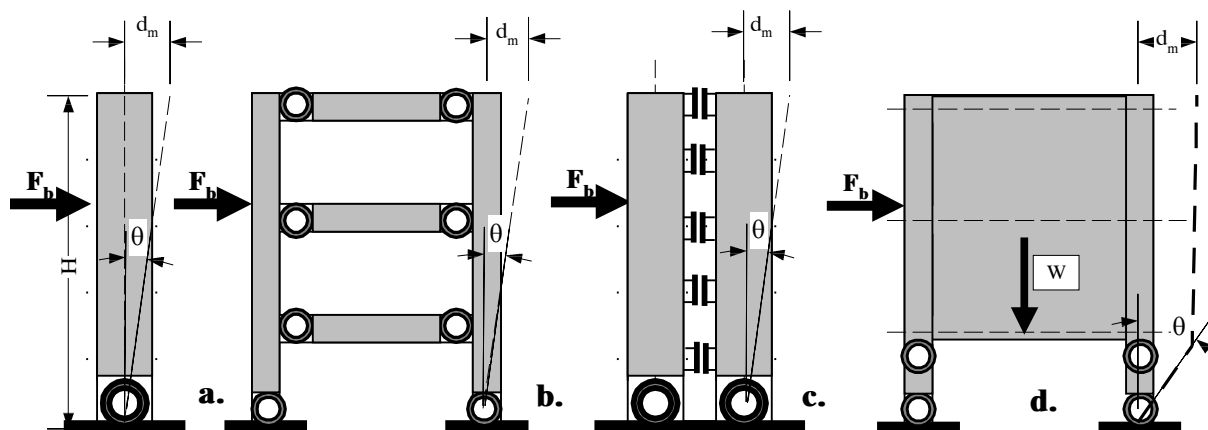
Tabela 5.2

Rezultati proračuna raspodele opterećenja prema linearnoj aproksimaciji prikazani su u Tabeli 5.2 i na slici 5.7, linija 2.

Raspodela ukupnog seizmičkog opterećenja na pojedine zidove prema krutostima na pomeranje u ovom slučaju može da se izvrši proporcionalno krutosti  $EI$  preseka zidova na savijanje.

### 5.3 PLASTIČNI MEHANIZMI SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE

Pri razmatranjima sistema sa jednim stepenom slobode usvojeno je da se sva nelinearna deformacija sistema - rotacije usled momenata savijanja odvijaju u oblasti uklještenja konzole, u *plastičnom zglobu konstrukcije*, slika 5.8.a.



Slika 5.8 Plastični mehanizmi konstrukcija

Da bi se ograničilo ukupno seizmičko opterećenje  $F_b$  složenijih konstrukcija, neophodno je da se formira *elasto-plastični mehanizam* konstrukcije. Kod *sistema zidova* koji deluju kao konzole, mehanizam se formira u nivou uklještenja *svih zidova* - konzola, slika 5.8.a.

Kod *sistema okvira*, poželjno je da se plastični zglobovi formiraju na *krajevima greda* i u *uklještenju stubova*, slika 5.8.b.

Kod sistema *povezanih zidova*, sa prečkama - *veznim gredama*, osim u uklještenju samih zidova, plastični zglobovi treba da se otvore i u *veznim gredama*, slika 5.8.c. Zavisno od proporcija veznih greda i nivoa opterećenja transverzalnim silama, moguće je formiranje

ili zglobova na oba kraja vezne grede, ili formiranje *transverzalnog plastičnog zgloba* prema slici 5.8.c.

Navedeni primeri su *idealni slučajevi*, kod kojih pomeranja konstrukcije nakon stvaranja mehanizma rastu proporcionalno visini. Ugao rotacije mehanizma definisan je odnosom maksimalnog pomeranja pri zemljotresu i visine objekta,  $\theta = d_m / H$ .

Kod konstrukcija sa "mekim" ili *fleksibilnim prizemljem*, slika 5.8.d iznos prinudnog pomeranja  $d_m$  pri zemljotresu ostvaruje se dominantno deformacijama prizemlja. U ovom slučaju, rotacija mehanizma  $\theta$  je znatno veća, pa su i deformacije krajeva stubova, zahtevi za duktilnošću znatno povećani. Konstrukcija je osetljiva i na efekte drugoga reda, pa se kod ovih sistema ne dozvoljava značajnija redukcija seizmičkog opterećenja, ili se pak zabranjuju propisima.

#### **5.4 OBEZBEĐENJE POUZDANOSTI ŽELJENOG MEHANIZMA KONSTRUKCIJE - "PROGRAMIRANO PONAŠANJE"**

Koncept snižavanja seizmičkog opterećenja formiranjem plastičnog mehanizma limitirane nosivosti podrazumeva da je projektant prethodno odabrao mesta formiranja plastičnih zglobova. U konstrukciji koja se "sastoji" od oblasti plastičnih zglobova i oblasti "elastičnog ponašanja", plastični zglobovi su "osigurači" konstrukcije od preopterećenja elastičnih zona, "najslabiji" delovi konstrukcije, ali sa kontrolisanim ponašanjem, projektovani na željeni nivo *momenata savijanja*. Osim obezbeđenja zahtevane duktilnosti plastičnih zglobova, pouzdan mehanizam podrazumeva i sledeće:

- da se plastični zglobovi formiraju u željenim presecima, a ne nekim drugim, nekontrolisano, i
- da ostali, na zglobove *priključeni delovi konstrukcije*, od kojih se očekuje da se ponašaju elastično, mogu da izdrže najveće uticaje koji se mogu javiti u plastičnim zglobovima pri *pomeranjima usled zemljotresa*.

"Ne znajući za namere projektanta", prinudna pomeranja konstrukcije i rotacije preseka usled zemljotresa vrlo verovatno će u plastičnim zglobovima izazvati momente jednake *kapacitetu nosivosti preseka* na savijanje, a oni mogu značajno da se razlikuje od *proračunskih momenata nosivosti*.

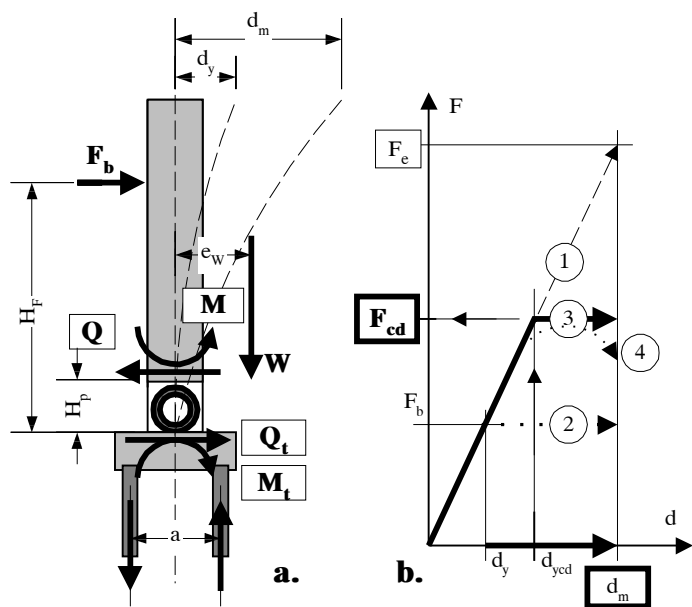
Da bi se priključeni delovi konstrukcije ponašali elastično, očigledno da moraju biti dimenzionisani na realni *kapacitet nosivosti plastičnih zglobova* pri datim pomeranjima. Pri tome, potrebno je obezbediti da se plastični mehanizam formira upravo rotacijama zglobova, a ne nekim drugim, *nepoželjnim formama mehanizma*, kao što je gubitak stabilnosti u čeličnim konstrukcijama, ili krti lomovi usled transversalnih sila u AB konstrukcijama.

Obezbeđenje ostatka konstrukcije od preopterećenja usled pobuđivanja realne nosivosti plastičnih zglobova naziva se *konceptom programiranog ponašanja* (izvorno - *capacity design*). Na projektantu je da obezbedi *hijerarhiju nosivosti* konstrukcije, da "kaže konstrukciji kako će da se ponaša pri zemljotresu".

#### **Primer 5.3.....**

*Za proračunsko seizmičko opterećenje konzolnog zida na slici 5.9.a usvojena je ukupna seizmička sila  $F_b (=F_e/R)$ . Presek u uklještenju - plastični zglob dimenzionisan je na moment savijanja  $M=F_b H_F$  i transversalnu silu  $Q=F_b$ . Na koje uticaje treba dimenzionisati konstrukciju, ako je realno izvedena nosivost plastičnog zgloba na savijanje  $M_u = \alpha M$  ?*

Odgovor elastične konstrukcije prikazan je linijom 1, a očekivani, proračunski odgovor konstrukcije sila-pomeranje prikazan je linijom 2 na slici 5.9.b.



Slika 5.9 Koncept programiranog ponašanja

Uz pretpostavku da je stvarno pomeranje pri zemljotresu jednako računskom pomeranju  $d_m$  elastične konstrukcije, u plastičnom zglobu će se indukovati moment savijanja  $M_u = \alpha M > M$ , zavisno od realne količine ugrađene armature i njenih karakteristika, u slučaju AB konstrukcija na primer.

U tom slučaju promeniće se i ukupno seizmičko opterećenje,  $F_{cd} = M_u / H_F = \alpha M / H_F$ . Realan odgovor konstrukcije prikazan je linijom 3 na slici 5.9.b.

Za ponašanje objekta u celini, realno veća nosivost plastičnog zgloba čak je i povoljna, jer će nelinearne deformacije nastupiti kasnije, pri pomeranju

$d_{ycd}$ , oštećenja će biti manja. Međutim, oblast plastičnog zgloba treba obezbediti na realnu transversalnu silu  $Q = F_{cd}$ , a viši deo konstrukcije i na realni moment  $\alpha M$ .

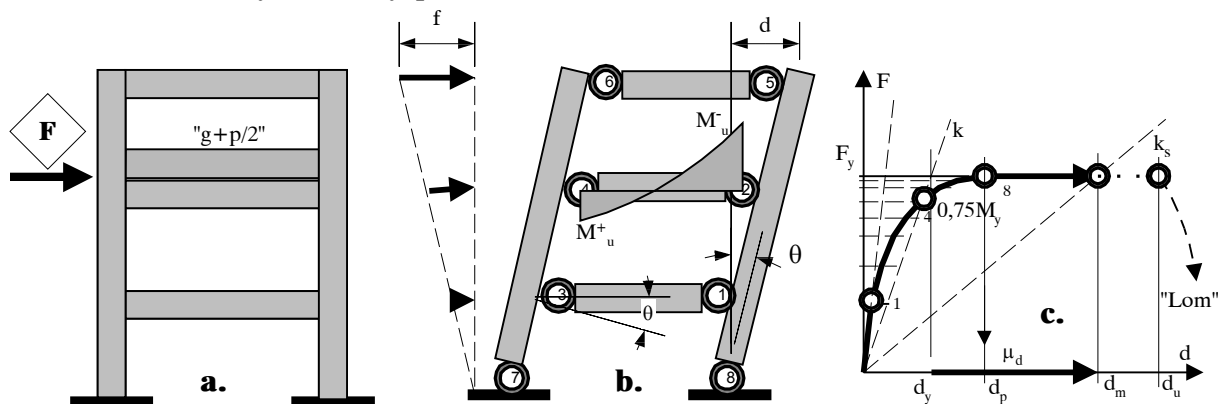
Pri zemljotresu, od temelja se očekuje da se ponašaju elastično, ako nije drugačije pretpostavljeno u analizi. Pri realnim uticajima u plastičnom zglobu, potrebno je i temelj i šipove na slici 5.9 sračunati na uticaje  $Q_t = F_{cd}$  i  $M_t = \alpha M$ .

U AB konstrukcijama, pri zemljotresu *višak armature ne mora da bude na strani sigurnosti*, jer je opterećenje tipa "prinudne deformacije"!

Ukolika su pomeranja konstrukcije značajna, ukupno seizmičko opterećenje može da opadne, jer se deo kapaciteta nosivosti plastičnog zgloba angažuje na uravnoteženju momenata usled gravitacionog opterećenja - efekti drugoga reda,  $F_b = (M_u - We_w) / H_w$ , linija 4 na slici 5.9.

## 5.5 OCENA PONAŠANJA KONSTRUKCIJA NELINEARNOM STATIČKOM ANALIZOM

Osim za istraživanja, ponekada je i u praksi potrebno odrediti nosivost konstrukcije na horizontalna opterećenja, tok i kapacitet deformacija konstrukcije koja je prethodno dimenzionisana, i čiji su detalji poznati, slika 5.10.



Slika 5.10 "Pushover" analiza

Sa poznatim detaljima armature, može da se odredi kapacitet nosivosti plastičnih zglobova, čija je dispozicija prethodno usvojena - pretpostavljena, slika 5.10.b. Ako nije unapred jasno koji mehanizam ima *najnižu nosivost*, potrebno je ispitirati sve *potencijalno opasne mehanizme*, jer su velike šanse da zemljotres aktivira upravo najslabiji.

Uz pretpostavku da seizmičko opterećenje  $F$  ima u svim fazama isti oblik raspodele po visini, što nije tačno, konstrukcija se "horizontalno gura" postepeno povećavajući nivo ukupnog opterećenja  $F$  - tzv. "pushover analiza". Kada u nekom od preseka prognoziranih plastičnih zglobova vrednost momenta savijanja dostigne kapacitet nosivosti, kruta veza elemenata zamenjuje se umetanjem "plastičnog zgloba" sa parom momenata savijanja na priključenim elementima.

U toku analize prati se razvoj formiranja mehanizma, redosled otvaranja zglobova, oznake 1-8 na slici 5.10.b. Za definisanje početne krutosti  $k$  usvaja se trenutak otvaranja prvog plastičnog zgloba, tačka 1 na slici 5.10.c, ili karakteristična tačka pri 75% nosivosti konstrukcije. Sa porastom opterećenja, konstrukcija se "para", do formiranja kompletnog mehanizma pri pomeranju  $d_p$  i opterećenju, *kapacitetu nosivosti*  $F_y$ , slika 5.10.c. Najranije otvoreni plastični zglobovi imaju i najveće post-elastične deformacije, pa i najveće zahteve za obezbeđenjem potrebne duktilnosti, tako da se na nivou konstrukcije u celini može govoriti o "prosečnoj potrebnoj duktilnosti"  $\mu_d$ .

Nosivost mehanizma  $F_y$  i vrednost očekivanog pomeranja  $d_m$  pri zemljotresu definišu *efektivnu sekantnu krutost*  $k_s$ , na kojoj se zasnivaju moderni koncepti proračuna pomeranja nelinearne konstrukcije na *zamenjujućem modelu*.

Nakon formiranja plastičnog mehanizma, rad spoljnog opterećenja  $F$  na dodatnim pomeranjima usled rotacije  $\theta$  jednak je radu momenata nosivosti plastičnih zglobova  $M_u$  na rotacijama krajeva greda  $\theta$ .