



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
www.grf.bg.ac.rs

---

Studijski program: **GRAĐEVINARSTVO**  
Modul: **KONSTRUKCIJE**  
Godina/Semestar: **3 godina / 5 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **TEORIJA BETONSKIH KONSTRUKCIJA 1  
(B2K3B1)**

Nastavnik: **Prof.dr Snežana Marinković**

Naslov predavanja: **ANALIZA**

Datum : 11.10.2021.

---

*Beograd, 2021.*

*Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.*

# Sadržaj

- Uvod
- Osnove proračuna
- Osobine materijala
- Analiza
  - ULS-Savijanje
  - ULS-Smicanje
  - ULS-Torzija
  - ULS-Strut&tie modeli
  - Trajnost
  - Performance based design
  - Ploče u jednom pravcu



# Analiza AB konstrukcija

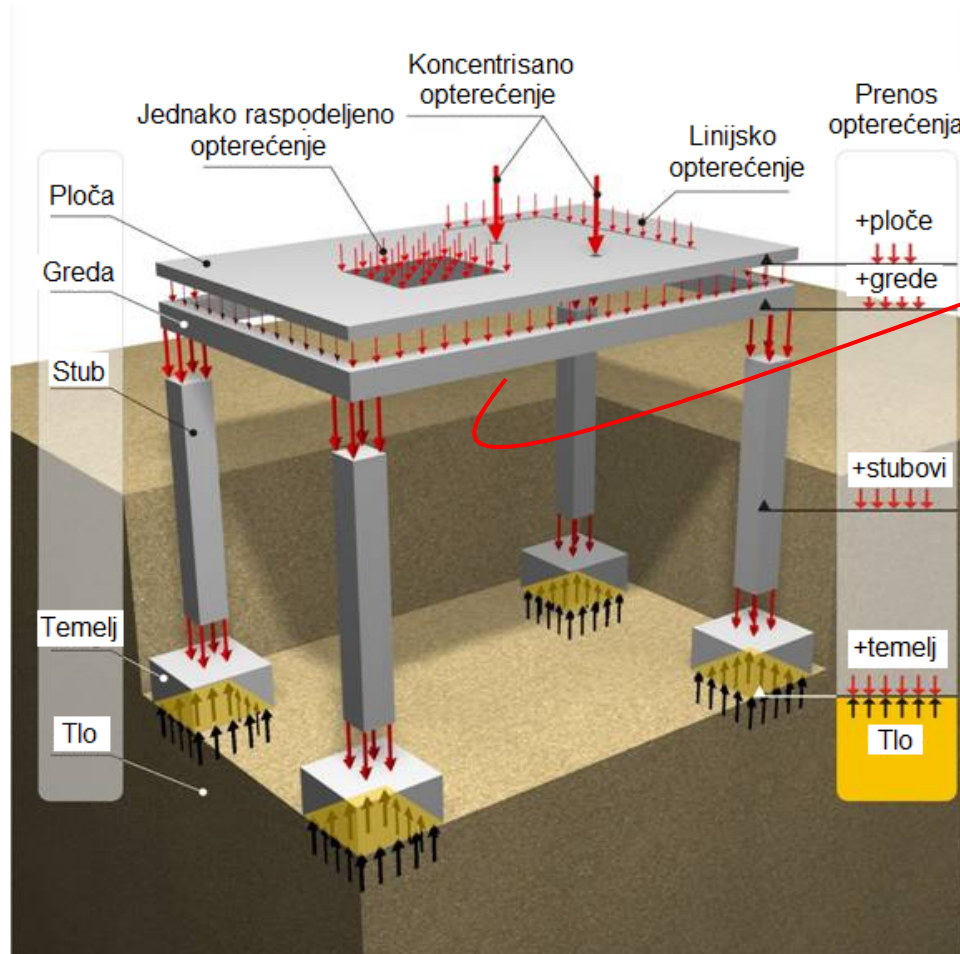
Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja i prinudnih deformacija, u AB konstrukcijama se javljaju naponi i deformacije, odnosno sile u preseku (M, V, N, T).

Da bi se sračunale presečne sile u AB elementima/konstrukcijama, potrebno je poznavati:

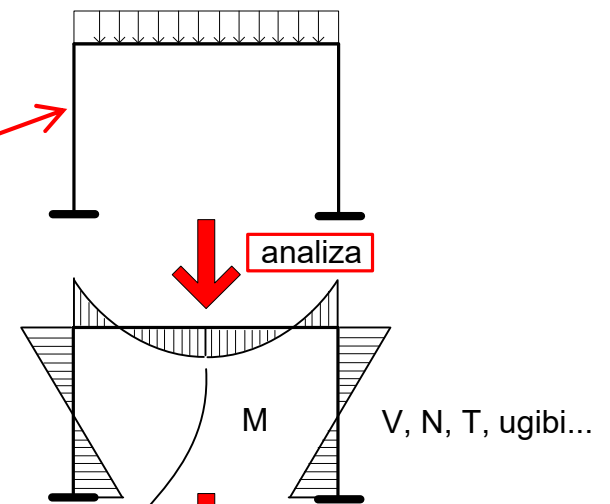
- opterećenje koje deluje na element (ovaj deo proračuna se najčešće naziva *analiza opterećenja*) - modeliranje opterećenja;
- konturne uslove (ili određivanje *statičkih sistema elemenata*, u zavisnosti od njihovih veza sa susednim elementima) – modeliranje konstrukcijskog sistema;
- *vezu između napona i deformacija* koja opisuje ponašanje betona i čelika armature - modeliranje realnog ponašanja armiranog betona kao spregnute konstrukcije.



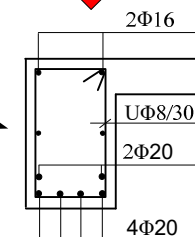
# Analiza AB konstrukcija



analiza opterećenja + statički sistem



dimenzionisanje



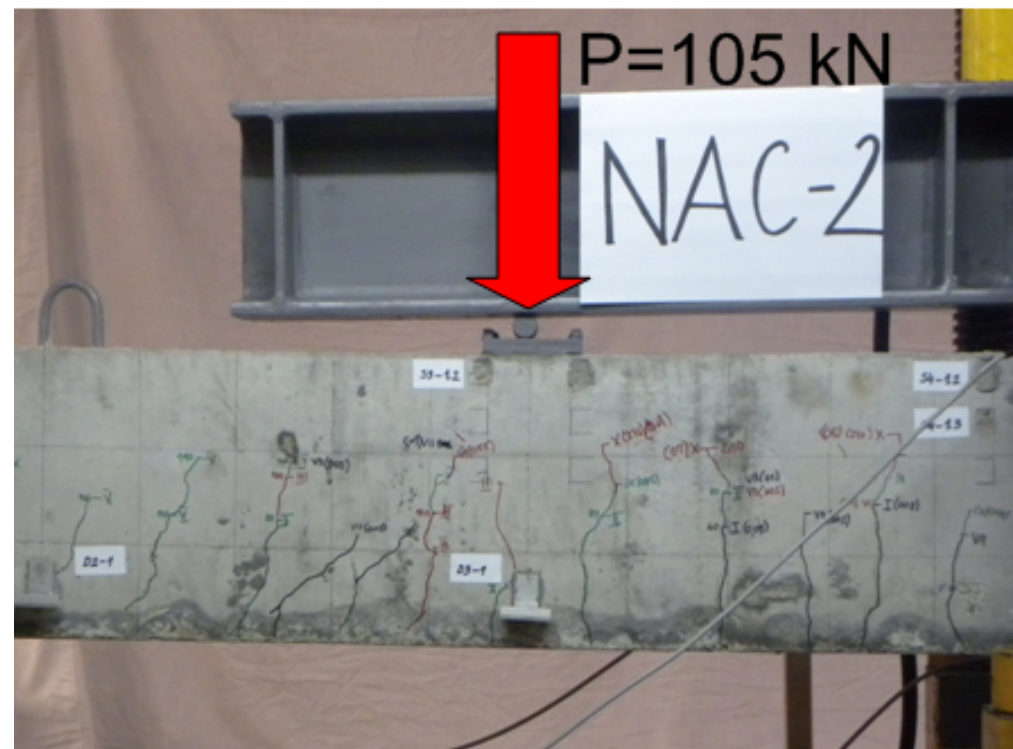
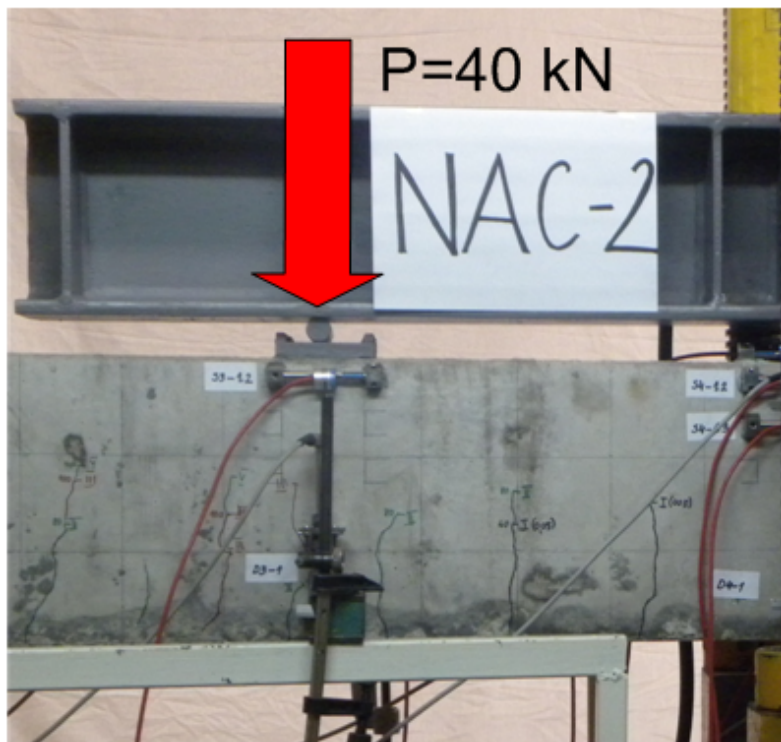
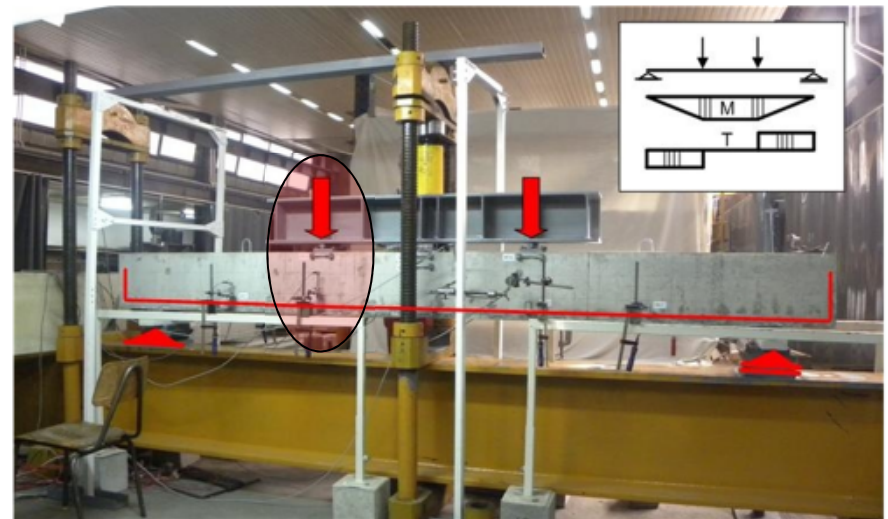
# Analiza AB konstrukcija

Cilj analize konstrukcija je da se sračunaju uticaji od dejstava (sile u presecima, naponi i deformacije) u konstrukciji. U tu svrhu, ponašanje – odgovor realnih konstrukcija se opisuje idealizovanim mehaničkim modelima različite složenosti.

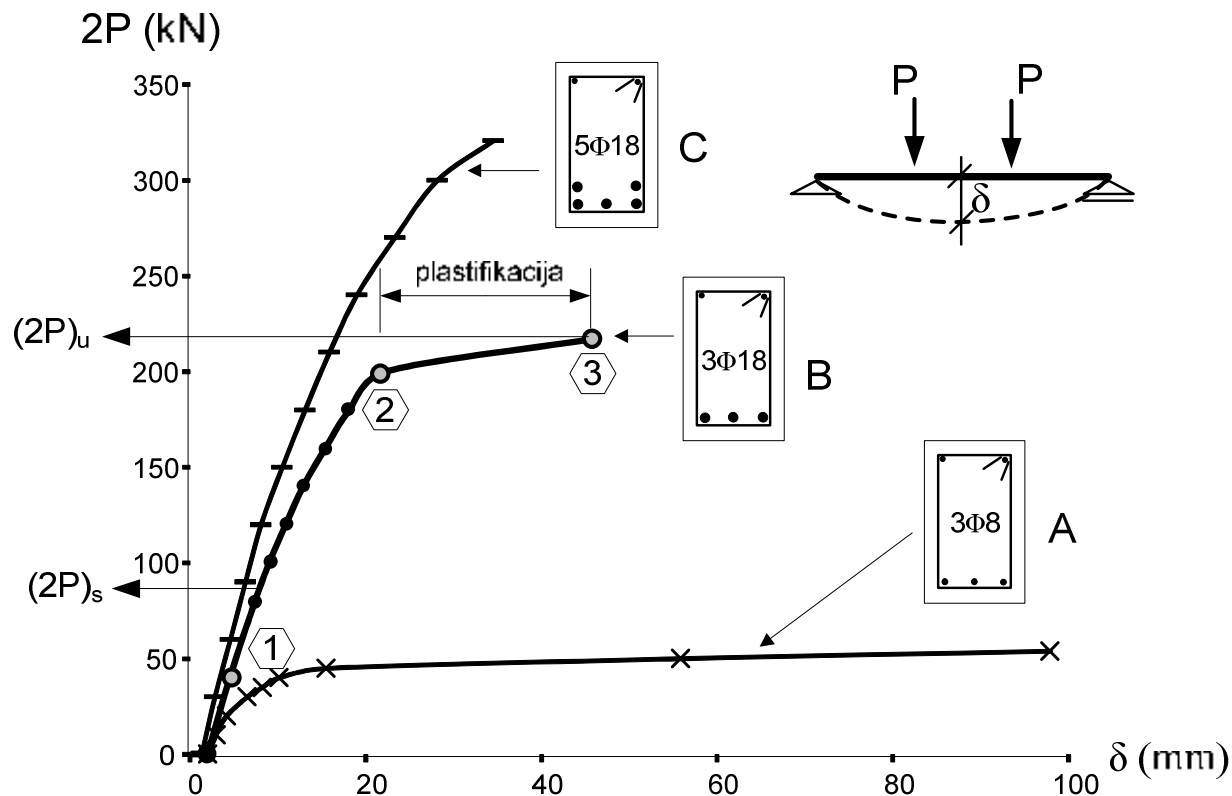
Ponašanje AB konstrukcija je složeno, jer je beton *viskoelastoplastičan materijal sa izraženom osobinom starenja* u oblasti napona pritisaka, dok je u zatezanju praktično linearno elastičan. AB konstrukcijski elementi su *spregnute konstrukcije* od dva različita materijala, i *normalno nisu homogeni*, zbog pojave *prslina*. Ovo dodatno komplikuje modeliranje u smislu da je potrebno na adekvatan način opisati sve posledice realnog odgovora – različito ponašanje preseka koji imaju prslinu od ponašanja neisprskalih preseka, *neujednačenu krutost elementa zbog isprskalosti, karakteristike prijanjanja* između čelika i betona, *sadejstvo zategnutog betona između prslina* itd.



Prosta greda opterećena sa dve koncentrisane sile u trećinama raspona (Ignjatović, 2013)



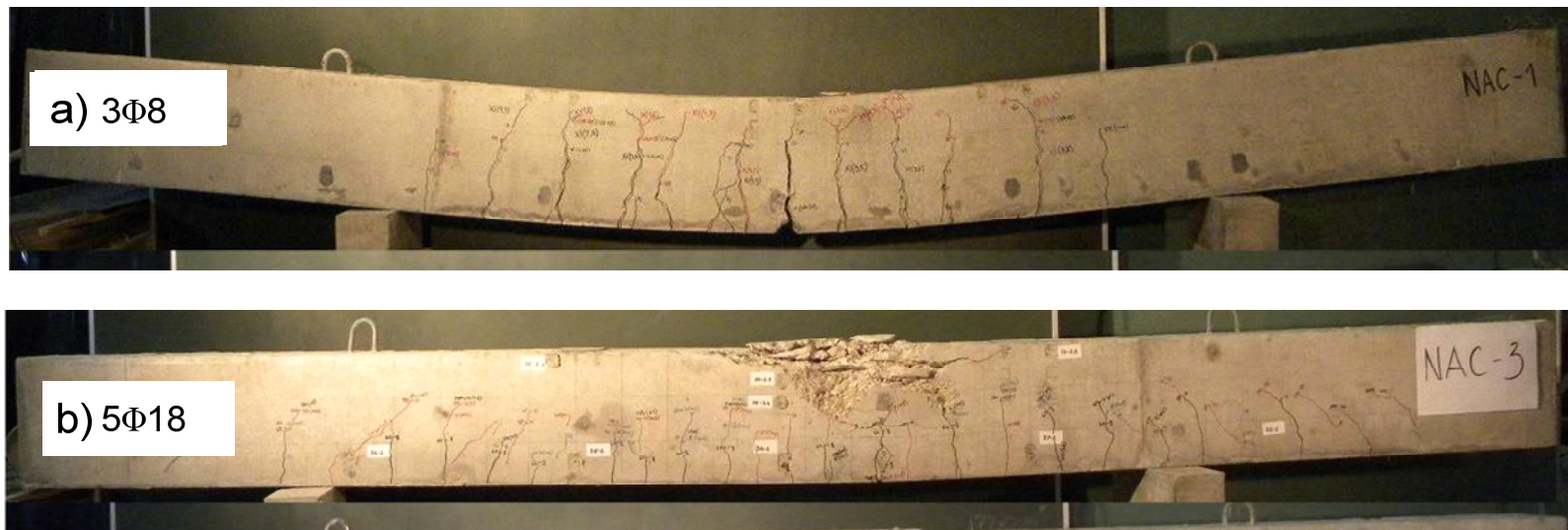
# Analiza AB konstrukcija



Zavisnost između opterećenja i ugiba od nule do loma, za različito armirane savijane grede (Ignjatović, 2013)



# Analiza AB konstrukcija



Izgled greda nakon loma: a) slabo armirana tipa A i b) jako armirana greda tipa C  
(Ignjatović, 2013)



# Analiza AB konstrukcija

Teorijski pristupi koji se danas koriste u analizi AB konstrukcija, počevši od najstarijeg i najjednostavnijeg, ka složenijim:

- **Linearna elastična analiza**
- **Linearna elastična analiza sa ograničenom preraspodelom**
- **Plastična analiza**
  - klasična teorija plastičnosti
  - strut&tie modeliranje
- **Nelinearna analiza**

Što je idealizacija realnog ponašanja tačnija, to je modeliranje komplikovanije, pa se za praktične proračune uvek traži kompromis između zadovoljavajuće tačnosti i složenosti modela.

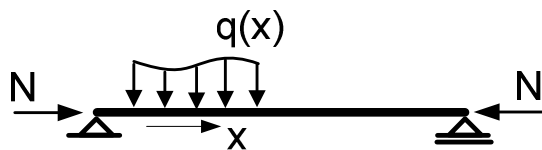


# Linearna elastična analiza

Zasniva se na jednostavnoj linearnoj vezi između napona i deformacija (Hukov zakon),  $E$  - modul elastičnosti:

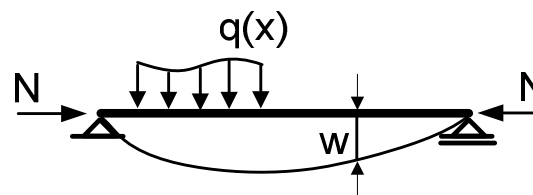
$$\sigma = E\varepsilon$$

Primenom linearne teorije elastičnosti se, na primer, za gredu opterećenu poprečnim  $q(x)$  i konstantnim aksijalnim opterećenjem  $N$ , dolazi do poznatih diferencijalnih jednačina:



$$EIw'' = -M_q(x)$$

ukoliko se uslovi ravnoteže ispisuju za nedeformisanu osu štapa  
(teorija prvog reda)



$$EIw'' + Nw = -M_q(x)$$

ukoliko se uslovi ravnoteže ispisuju za deformisanu osu štapa ( $N/EI = \text{const}$ )  
(teorija drugog reda)

# Linearna elastična analiza

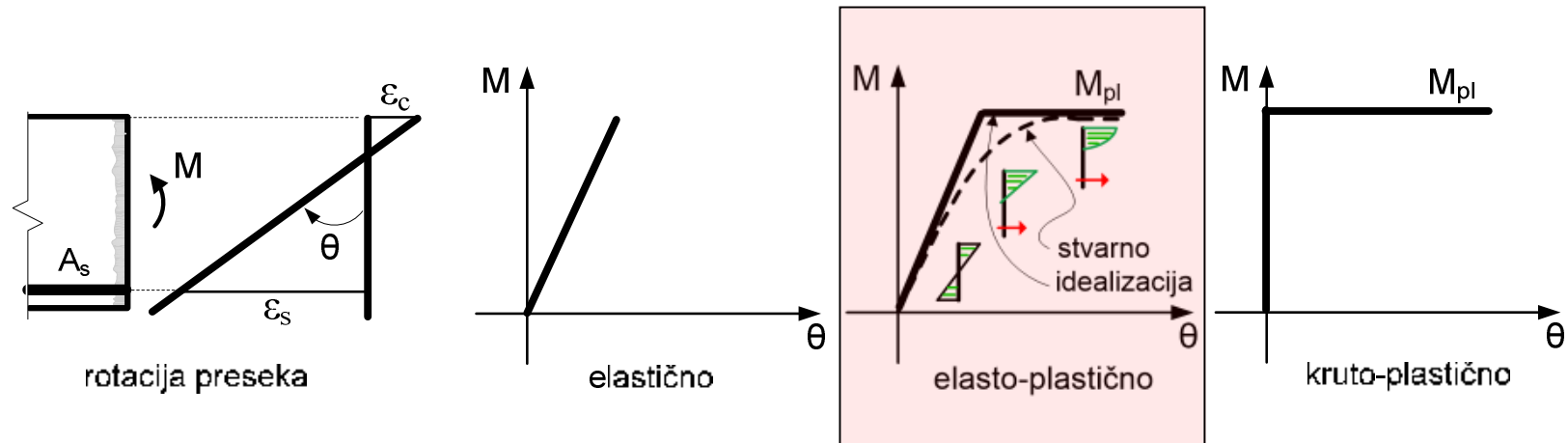
U slučajevima kada se član  $N_w$  u diferencijalnoj jednačini ne može zanemariti (velika pomeranja, izvijanje vitkih elemenata), rešenja se moraju tražiti korišćenjem teorije drugog reda – **nelinearna analiza**.

Za **eksploataciona kratkotrajna opterećenja**, može se smatrati da ova analiza daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti za praktične proračune AB konstrukcija. Ukoliko je uticaj vremenskih deformacija betona od značaja za odgovor konstrukcije (na primer, kod prethodno napregnutih elemenata), umesto Hukovog zakona treba koristiti konstitutivne jednačine betona za dugotrajna opterećenja.



# Plastična analiza

Na nivou veze između momenta savijanja i rotacije preseka, ponašanje se može aproksimirati elastičnim, elasto-plastičnim ili kruto plastičnim modelom.



## VAŽNO:

Da bi se ponašanje AB preseka, odnosno elementa, moglo modelirati elasto-plastičnim ili plastičnim modelom, neophodno je da su kritični preseki elemenata projektovani tako da u njima čelik armature teče pre dostizanja loma po betonu. Pored toga, povećanje kapaciteta plastične deformacije se postiže utezanjem betona. U suprotnom, lom preseka odnosno elementa je krt - pri malim deformacijama-obrtanjima - elastično.

# Plastična analiza

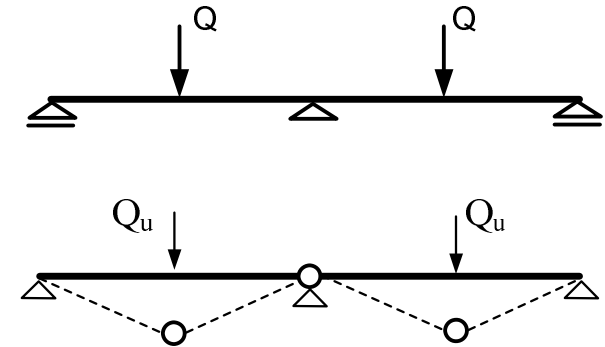
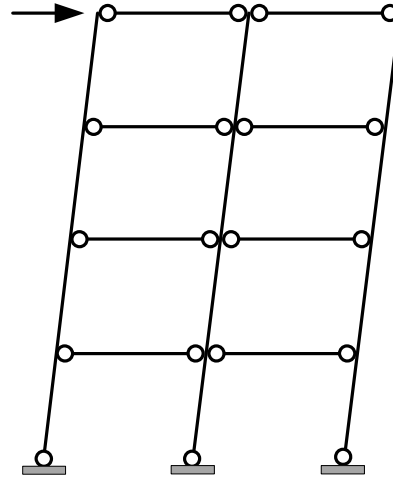
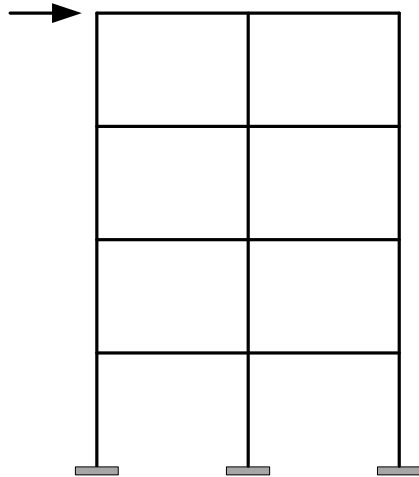
AB konstrukcije se projektuju tako da se obezbedi elasto-plastično ponašanje u kritičnim presecima, što je pre svega od interesa za odgovor konstrukcije pri seizmičkom opterećenju. To znači da će se pojedini preseki, odnosno zone u konstrukciji, ponašati kao neka vrsta zgloba koji se naziva *plastični zglob*, jer ima određen kapacitet rotacije zahvaljujući tečenju armature, ali u njemu moment savijanja nije jednak nuli, već momentu koji presek može da prihvati pri dostizanju granice razvlačenja čelika, na slici obeležen kao  $M_{pl}$  – *moment plastičnosti*.

Lom konstrukcije nastaje formiranjem potrebnog broja plastičnih zglobova koji konstrukciju prevodi u plastični mehanizam.



# Plastična analiza

Kod statički određenih konstrukcija, potrebno je formiranje jednog plastičnog zgloba, dok kod  $n$  puta statički neodređenih konstrukcija je potrebno da se formira  $n+1$  plastičan zglob da bi konstrukcija prešla u mehanizam i izgubila sposobnost daljeg nošenja opterećenja.



# Plastična analiza

Primena klasične teorije plastičnosti se zasniva na kruto-plastičnom modelu ponašanja i na dvema teoremama: statičkoj i kinematičkoj teoremi. Primenom ovih teorema se sračunava donja i gornja granica graničnog opterećenja (opterećenja loma) i one se često primenjuju jer su jednostavnije od direktne metode ili metode inkrementalne plastifikacije.

Prema *statičkoj teoremi*, opterećenje koje izaziva statički dopustivu raspodelu napona, pri čemu uslov tečenja nije nigde prekoračen, predstavlja donju granicu opterećenja loma. Pod statički dopustivom raspodelom napona podrazumeva se ona raspodela koja zadovoljava uslove ravnoteže i konturne uslove po silama.

Prema *kinematičkoj teoremi*, opterećenje koje zadovoljava uslove ravnoteže i izaziva kinematički dopustivu raspodelu deformacija, predstavlja gornju granicu opterećenja loma. Pod kinematički dopustivom raspodelom deformacija podrazumeva se ona raspodela koja zadovoljava uslove tečenja i konturne uslove po pomeranjima.

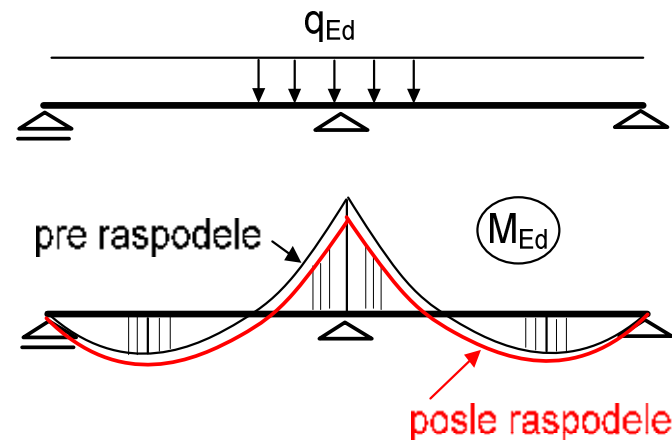
U analizi AB konstrukcija, statička teorema najviše se primenjuje u okviru tzv. metode pritisnutih štapova i zatega (*strut and tie modeli*), dok kinematička teorema ima najveću primenu za analizu ploča, *metodom linija loma*.



# Plastična analiza

## *Linearna elastična analiza sa ograničenom preraspodelom*

Mnogi standardi dozvoljavaju primenu takozvane **linearne elastične analize sa ograničenom preraspodelom**. To praktično znači da se dozvoljava “preraspodela“ uticaja sračunatih primenom teorije elastičnosti, u izvesnoj meri i ako su ispunjeni određeni uslovi, bez eksplicitne provere kapaciteta rotacije odgovarajućih preseka. Pri tome je samo potrebno da preraspodeljeni uticaji zadovolje uslove ravnoteže.





# Plastična analiza

## *Metoda pritisnutih štapova i zatega - strut and tie modeli*

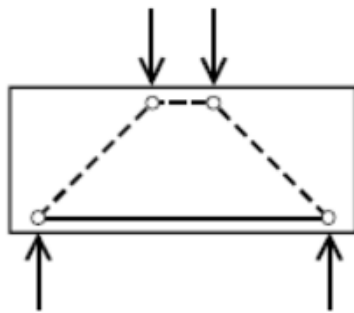
U AB elementima sa prslinama, sile se prenose putem napona pritisaka kroz beton (i eventualno, pritisnutu armaturu) i zatezanjem koje pretežno prihvata armatura. Kada su prsline razvijene, trajektorije glavnih napona pritisaka postaju približno prave i mogu se aproksimirati pritisnutim štapovima opterećenim jednoaksijalnim pritiskom, dok se zategnuti delovi (armatura) modeliraju kao zatege.

Pun nosač se može zameniti sistemom **pritisnutih i zategnutih, jednoaksijalno opterećenih štapova** koji se susiće u **čvorovima** – zonama koje se nalaze u višeosnom stanju napona. Ovaj sistem štapova treba da prati tok unutrašnjih sila u isprskalom nosaču u trenutku loma.

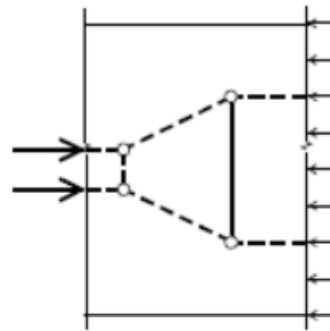


# Plastična analiza

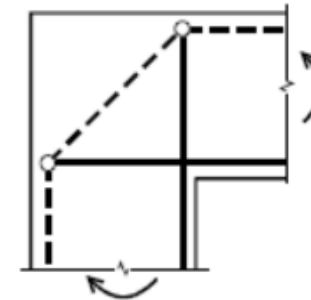
Ovakav način modeliranja se zasniva na **statičkoj teoremi** granične analize prema kojoj, svaka statički dopustiva raspodela napona, dakle raspodela koja zadovoljava uslove ravnoteže i konturne uslove po silama, i ne prekoračuje uslove tečenja (nosivosti), daje donju granicu opterećenja loma. Ako se statički dopustiva naponska polja aproksimiraju sistemom jednoaksijalno opterećenih štapova, dobija se metoda pritisnutih štapova i zatega. Dakle, izabrani sistem štapova i zatega, mora biti u ravnoteži sa spoljašnjim silama i zadovoljavati konturne uslove.



zidni nosač



zona unošenja sile  
prednaprezanja



čvor rama

# Nelinearna analiza

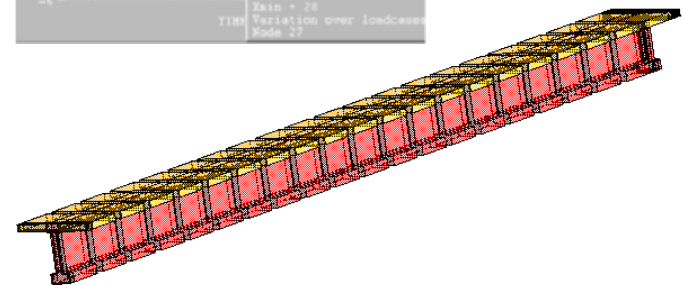
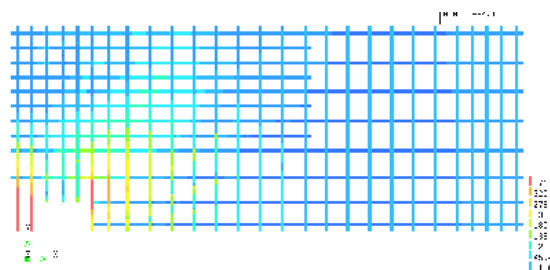
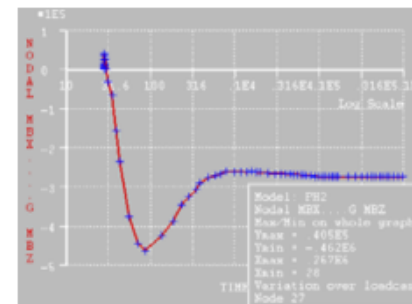
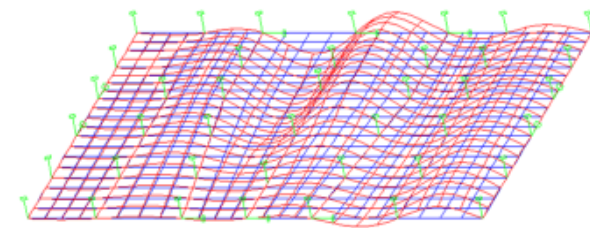
Nelinearna analiza je najsloženiji vid analize konstrukcija kojim se obuhvata realno ponašanje AB konstrukcija u svim graničnim stanjima koja su od interesa. Dakle, modeliraju se svi oblici nelinearnosti i sve pojave koje karakterišu realan odgovor AB konstrukcija:

- **materijalna nelinearnost** – nelinearne veze napon-deformacija za beton i čelik u višeosnom stanju napona, ponašanje betona pri zatezanju i s tim u vezi pojava prslina, sadejstvo zategnutog betona između prslina, karakteristike prijanjanja beton-čelik itd;
- **geometrijska nelinearnost** – efekti drugog reda;
- **reološko ponašanje** – efekti skupljanja, tečenja i relaksacije.



# Nelinearna analiza

S obzirom na veliku složenost, nelinearna analiza se sprovodi primenom metode konačnih elemenata (MKE), odnosno diskretizacijom kontinuuma na elemente konačnih dimenzija, a za rešavanje se koriste razne numeričke metode. Danas su razvijeni programi za nelinearnu analizu različitih mogućnosti, među kojima se za analizu AB konstrukcija preporučuje DIANA (TNO Delft, Holandija).



# Teorija drugog reda

Vertikalni noseći AB elementi, kao što su stubovi i zidovi, su pretežno opterećeni na pritisak. Mogu biti geometrijski *vitki*, odnosno dugački, „tanki“ i fleksibilni.

Početni ekscentricitet aksijalne sile pritiska duž AB elementa uvek postoji (od geometrijskih imperfekcija i momenata savijanja prvog reda) i povećava se usled njegovih pomerenja, pa se javljaju uticaji drugog reda – dodatni momenti savijanja. Pod *vitkim AB elementima* se podrazumevaju elementi kod kojih dodatni momenti savijanja nisu zanemarljivi i kod kojih lom može nastupiti: ili usled progresivnog i neproporcionalnog povećanja deformacija i gubitka stabilnosti, ili iscrpljenjem nosivosti određene čvrstoćama materijala (šta je kritičnije).



# Teorija drugog reda

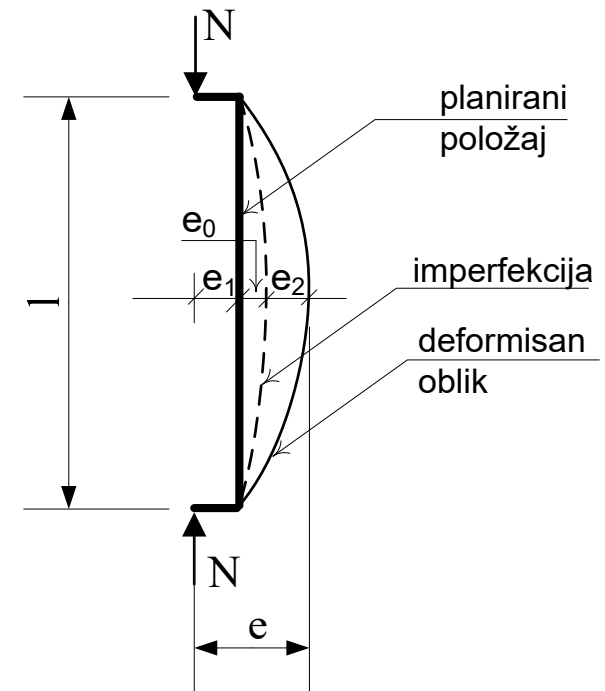
Problem nije samo **geometrijski nelinearan** (normalne sile utiču na stanje momenata savijanja), već je i **materijalno nelinearan**: stanje unutrašnjih sila zavisi od veličine pomeranja a ona su, u AB elementima za više nivoe napona, nelinearna funkcija opterećenja. Pored svega toga, potrebno je uvesti i uticaj vremenskih deformacija betona.

$$e = e_0 + e_1 + e_2$$

$e_0$  ekscentricitet usled imperfekcija

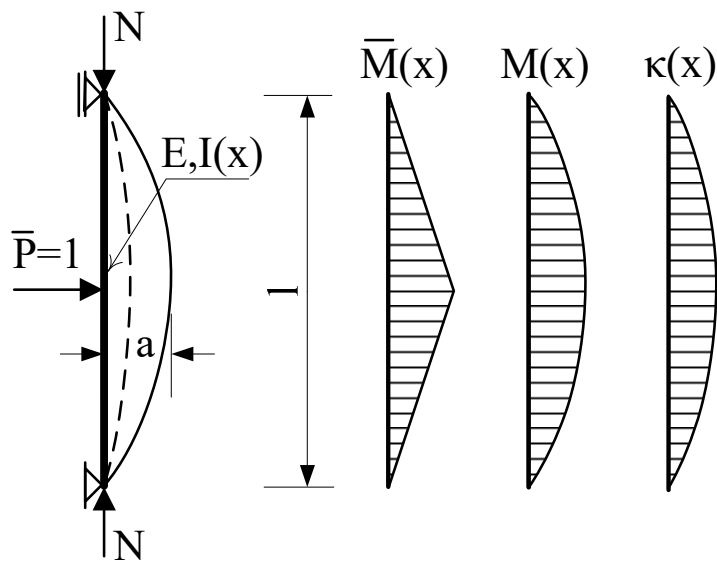
$e_1 = \frac{M_1}{N}$  ekscentricitet prvog reda, posledica momenta savijanja prvog reda  $M_1$

$e_2$  ekscentricitet drugog reda, posledica deformacije pritisnutog elementa



# Teorija drugog reda

Da bi se, na primer, odredilo pomeranje sredine štapa dužine  $l$ , zglobno vezanog na oba kraja, potrebno je rešiti integral:



$$a = \int_0^l \frac{\bar{M}(x) \cdot M(x)}{EI(x)} dx = \int_0^l \bar{M}(x) \kappa(x) dx$$

$\bar{M}(x)$  dijagram momenata savijanja od jedinične sile na mestu  $i$  u pravcu traženog pomeranja;

$M(x)$  dijagram momenata savijanja od spoljašnjeg opterećenja;

$E$  modul elastičnosti;

$I(x)$  moment inercije poprečnih preseka;

$\kappa(x) = M(x) / EI(x)$  **krivina preseka.**

# Teorija drugog reda

Moment inercije  $I(x)$ , zbog isprskalosti elementa, nema konstantnu vrednost duž AB štapa i nelinearno zavisi od nivoa napona, odnosno opterećenja. Zbog toga, i u slučaju da je dijagram momenata savijanja od spoljašnjeg opterećenja linearan, njemu će odgovarati nelinearna raspodela krivina preseka.

Ako se zna zakon promene krivine u funkciji veličine momenta savijanja, normalne sile, količine i rasporeda armature u preseku date geometrije, traženo pomeranje može se naći, recimo, korišćenjem Morove analogije, ili numeričkom integracijom. Za AB elemente osetljive na efekte drugog reda – vitke elemente, proračun se sprovodi iterativno, jer svakom novom sračunatom stanju pomeranja odgovara novo stanje momenata savijanja. Ako proračun deformacija i sila ne konvergira, pomeranja usled normalnih sila rastu brže od prirasta nosivosti preseka pri povećanju krivina, pa nastupa lom usled gubitka stabilnosti.

**Analiza uticaja drugog reda se ne razmatra u ovom kursu.**





# EC2

Prema EC2 za analizu elemenata konstrukcija i konstrukcija može se koristiti:

- linearna elastična analiza,
- linearna elastična analiza sa ograničenom preraspodelom,
- plastična analiza (uključujući metodu pritisnutih štapova i zatega),
- nelinearna analiza.



# EC2

*Linearna elastična analiza* se zasniva na linearnoj teoriji elastičnosti i može se koristiti i za granično stanje upotrebljivosti i za granično stanje nosivosti. Pri tome se, za određivanje uticaja od dejstava, može pretpostaviti da su preseki neisprskali, linearna veza između napona i dilatacija i srednja vrednost modula elastičnosti.

Za određivanje uticaja od prinudnih deformacija (temperatura, skupljanje, sleganje oslonaca), preporučuje se ipak, za granično stanje nosivosti, da se koristi redukovana krutost na bazi isprskalih preseka, pri čemu se može zanemariti sadejstvo zategnutog betona između prslina, ali sa uzimanjem tečenja u obzir. Za granično stanje upotrebljivosti treba uzeti u obzir postepen razvoj prslina u presecima elemenata.

# EC2

**Linearna elastična analiza sa ograničenom preraspodelom** koristi se samo za dokaz graničnog stanja nosivosti. Momenti savijanja dobijeni linearnom elastičnom analizom, mogu se, u stanju loma, preraspodeliti, pod uslovom da je rezultujuća raspodela momenata u ravnoteži sa spoljašnjim opterećenjem.

U kontinualnim gredama i pločama, koji su pretežno opterećeni na savijanje, i imaju odnos susednih raspona u granicama od 0.5 do 2, momenti savijanja se mogu preraspodeliti, bez eksplicitne provere rotacionog kapaciteta, ako je obezbeđeno:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \frac{x_u}{d} \quad \text{za } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq k_3 + k_4 \frac{x_u}{d} \quad \text{za } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

$$\delta \geq k_5 \quad \text{za armaturu klase duktilnosti B i C}$$

$$\delta \geq k_6 \quad \text{za armaturu klase duktilnosti A}$$

$$k_1 = 0.44$$

$$k_2 = k_4 = 1.25(0.6 + 0.0014 / \varepsilon_{cu2})$$

$$k_3 = 0.54$$

$$k_5 = 0.70$$

$$k_6 = 0.80$$

$\delta$  odnos momenta nakon preraspodele i elastičnog momenta,  
 $x_u$  položaj neutralne linije u ULS nakon izvršene preraspodele,  
 $d$  statička visina preseka.



# EC2

**Plastična analiza** može da se zasniva ili na statičkoj metodi teorije plastičnosti (donja granica rešenja) ili na kinematičkoj metodi (gornja granica rešenja) i koristi se samo za dokaz graničnog stanja nosivosti. Bez direktne kontrole rotacionog kapaciteta može se koristiti ukoliko je duktilitet kritičnih preseka dovoljan za formiranje mehanizma loma.

Smatra se da kritični preseki imaju potreban duktilitet, bez eksplicitnog dokaza, ako su ispunjeni svi sledeći uslovi:

-površina zategnute armature je ograničena, tako da je u svim presecima zadovoljeno:

$$x_u/d \leq 0.25 \text{ za betone klase } \leq C50/60$$

$$x_u/d \leq 0.15 \text{ za betone klase } \geq C55/67$$

- armatura je klase duktilnosti B i C,

- odnos momenta nad srednjim osloncem i momenta u polju je između 0.5 i 2.

Približna metoda za dokaz potrebnog rotacionog kapaciteta kritičnih preseka u gredama i pločama u jednom pravcu data je u poglavlju 5.6.3, EC2.



# EC2

*Analiza primenom modela sa pritisnutim štapovima i zategama* može da se koristi za proračun ULS u oblastima kontinuiteta i za proračun ULS i konstrukcijske detalje u oblastima diskontinuiteta. Može da se koristi i za proračun SLS, na primer proračun napona u armaturi ili širine prslina, ako postoji približna kompatibilnost modela sa uticajima prema linearno elastičnoj analizi.

Ovi modeli se sastoje od pritisnutih štapova (struts) koji predstavljaju polja napona pritisaka, zatega (ties) koje predstavljaju armaturu i čvorova (connected nodes). Sile u svim elementima treba da budu određene tako da obezbeđuju ravnotežu sa opterećenjima koja deluju u graničnom stanju nosivosti.

Mogući postupci za formiranje odgovarajućih modela uključuju usvajanje trajektorija i dijagrama napona određenih prema linearno elastičnoj analizi ili prema metodi puteva prenošenja opterećenja (load path method).

Analiza primenom modela sa pritisnutim štapovima i zategama se razmatra u posebnom poglavlju.



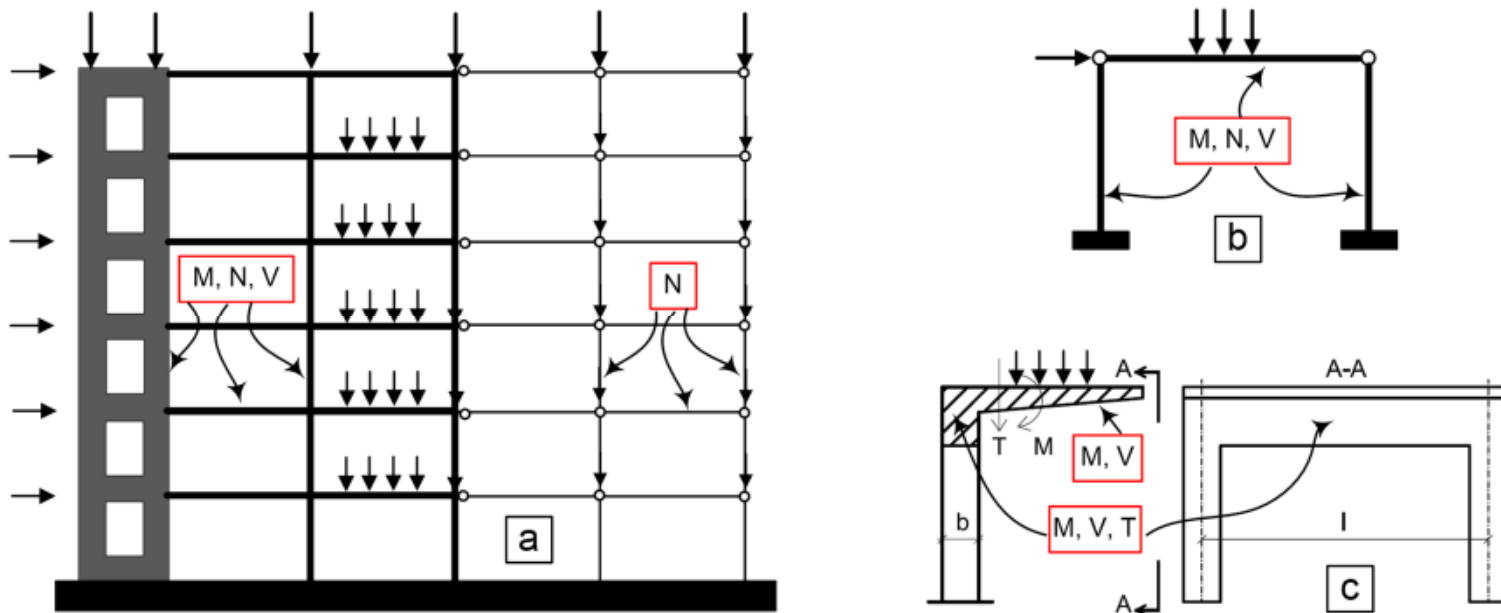
# EC2

*Nelinearna analiza* se može koristiti za kontrolu graničnog stanja upotrebljivosti i graničnog stanja nosivosti. Pod nelinearnom analizom se podrazumeva analiza na bazi materijalne i/ili geometrijske nelinearnosti. Analiza može biti po teoriji prvog ili po teoriji drugog reda.

Za vitke konstrukcije, u kojima ne mogu da se zanemare uticaji drugog reda, EC2 predlaže približne postupke – metode.



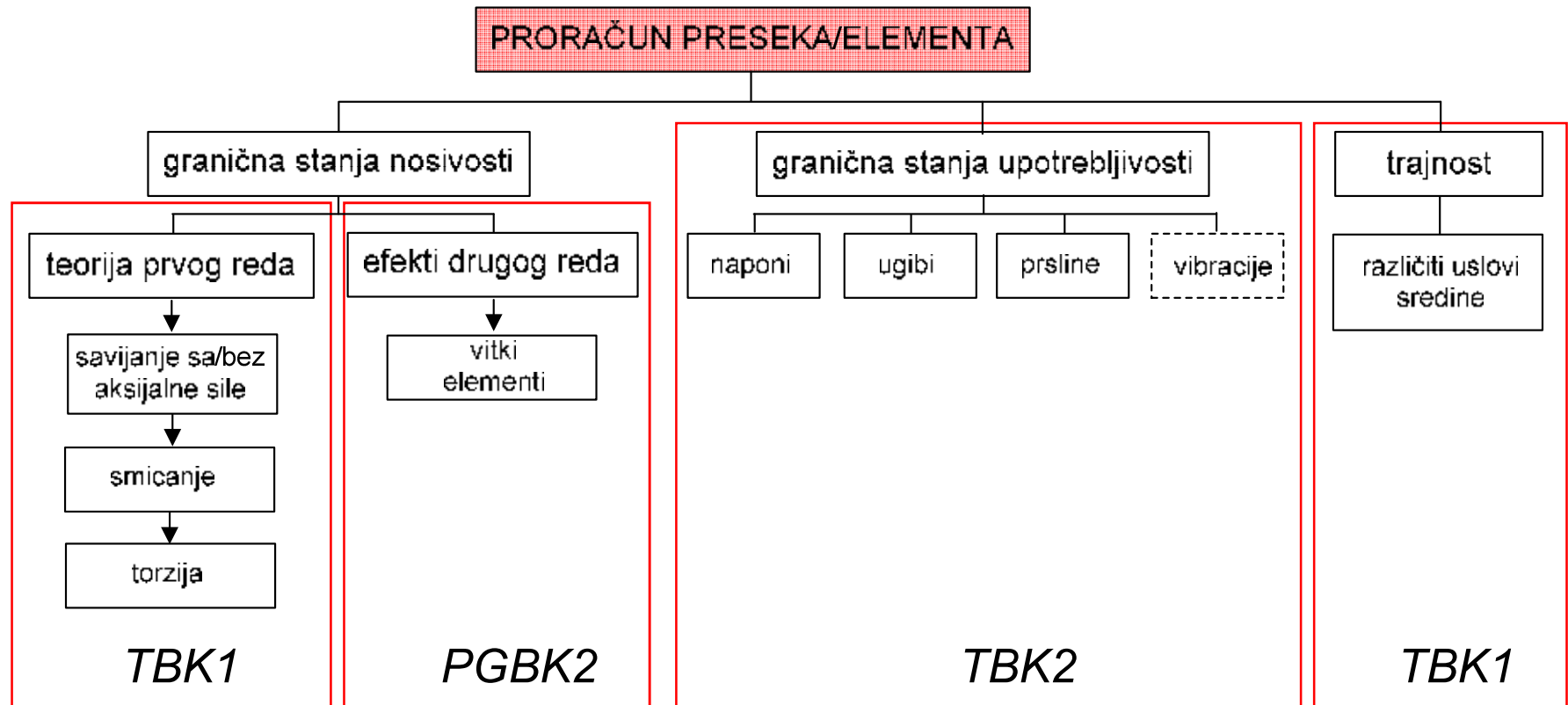
# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija



Mešoviti konstrukcijski sistem zgrade (a), konstrukcijski sistem hale u poprečnom pravcu (b) i konstrukcijski sistem nadstrešnice (c)

# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija prema EC2

ŠTA JE POTREBNO DOKAZATI ?

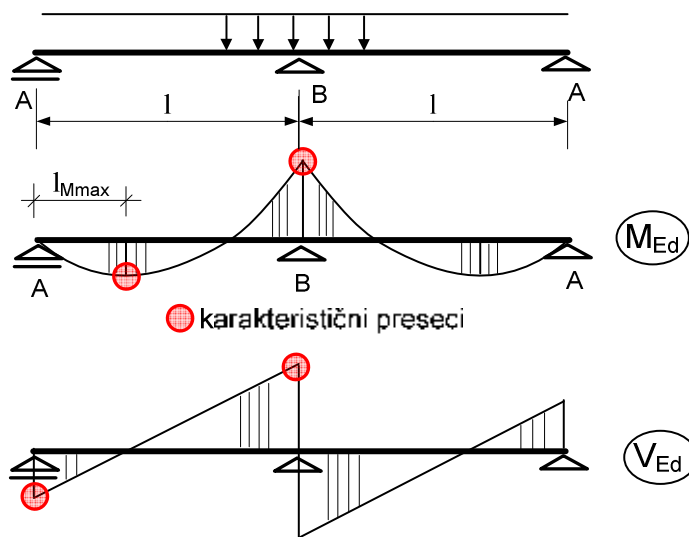




# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija

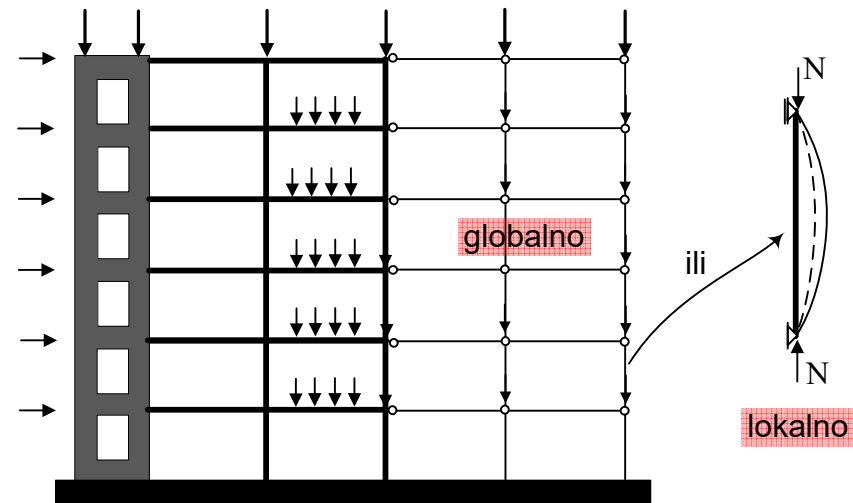
## NOSIVOST

teorija prvog reda



nosivost preseka  $\leftrightarrow$  nosivost  
elementa/konstrukcije?

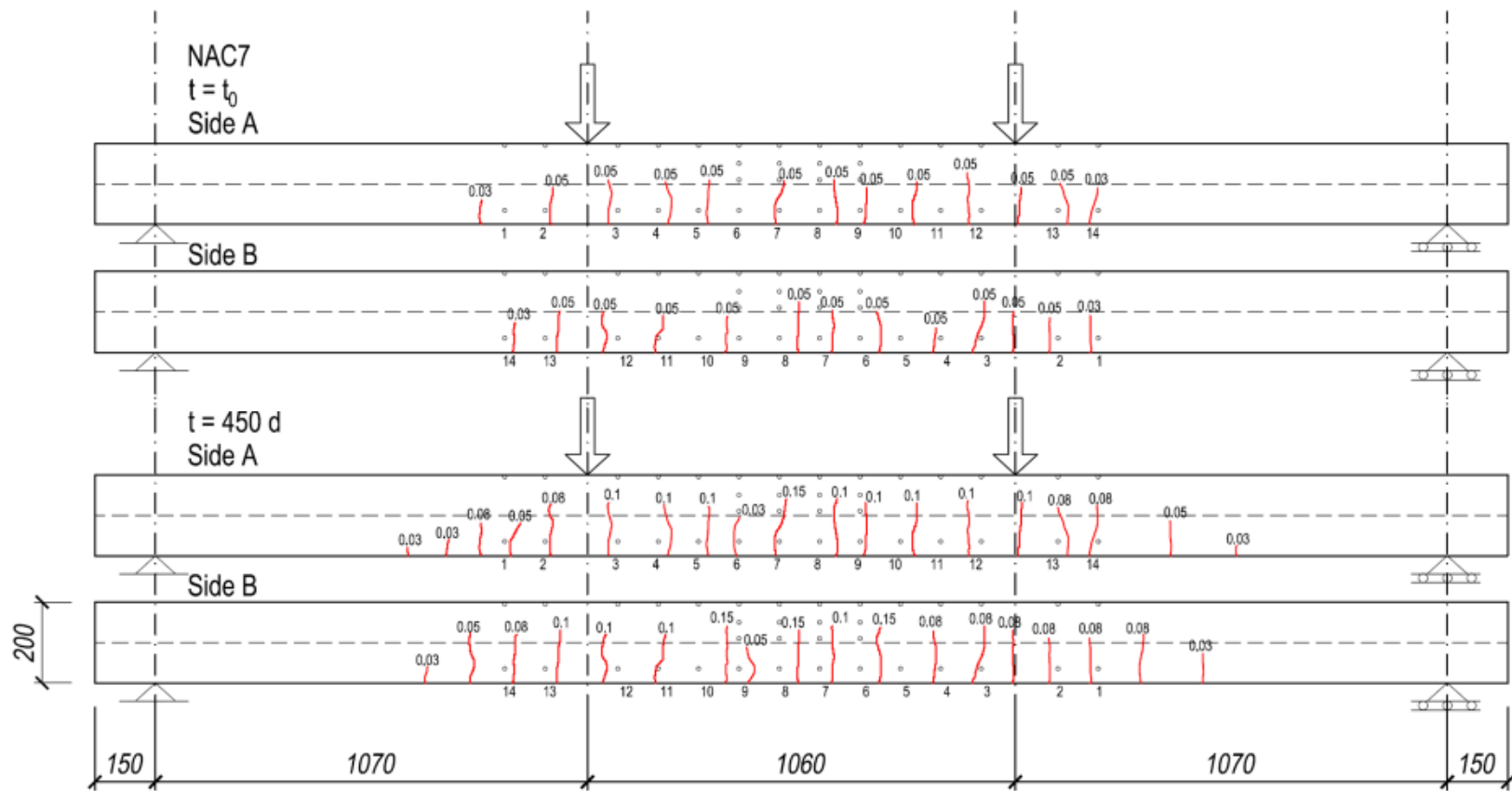
efekti drugog reda



nosivost konstrukcije na globalnom nivou  
ili na lokalnom nivou izdvojenog elementa

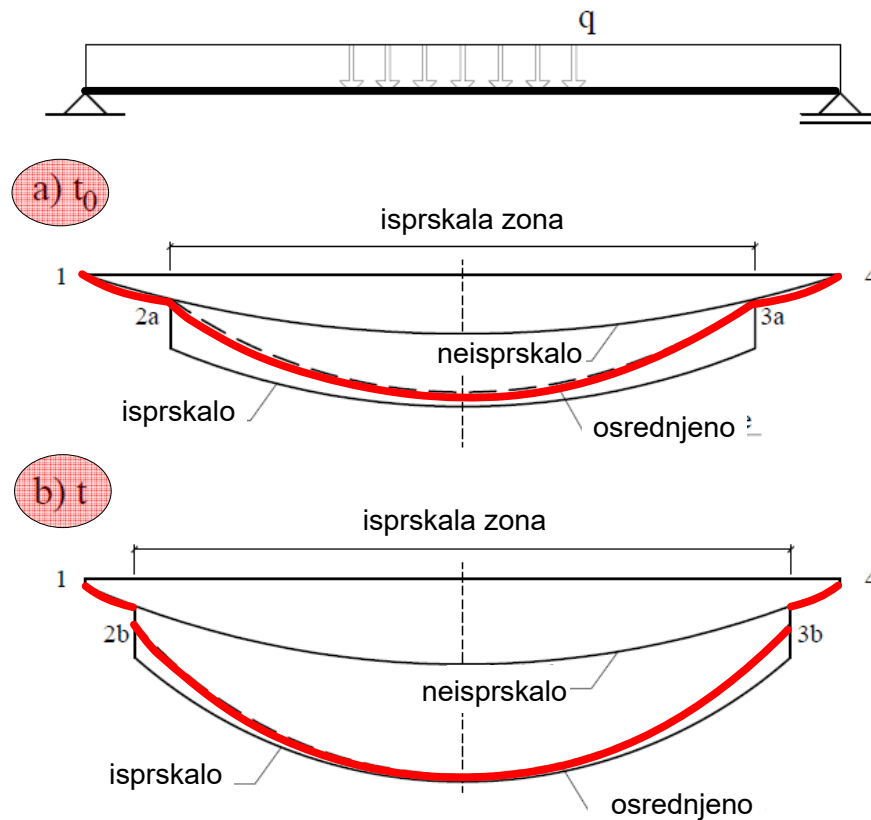
# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija

## *PRSLINE – nivo AB elementa*

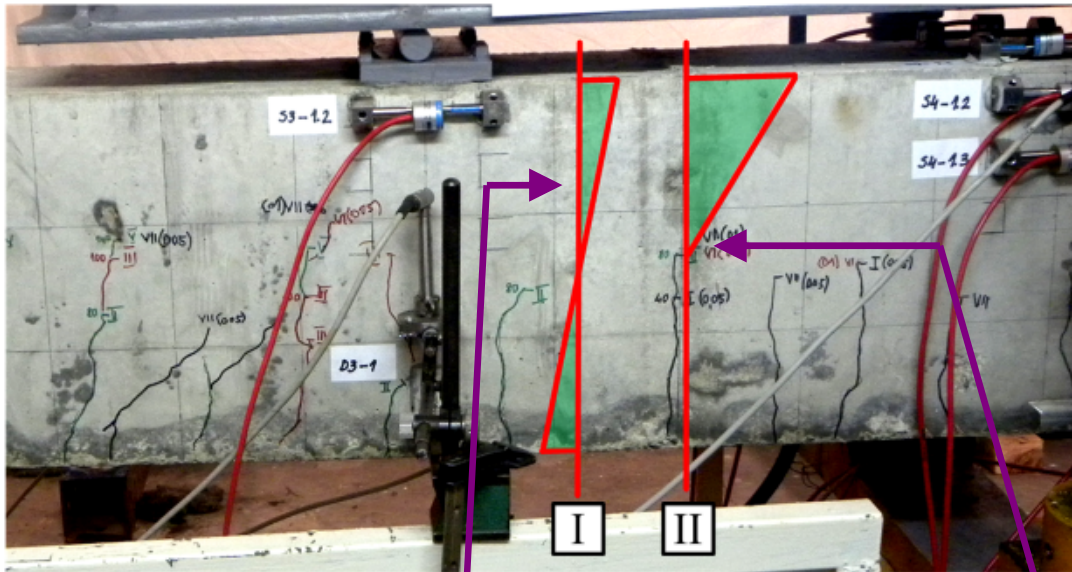


# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija

## *UGIBI – nivo AB elementa*



# Principi dokaza graničnih stanja AB konstrukcija



**NAPONI-**  
*nivo preseka*

