



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
www.grf.bg.ac.rs

---

Studijski program: **GRAĐEVINARSTVO**

Modul: **KONSTRUKCIJE**

Godina/Semestar: **3 godina / 5 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **TEORIJA BETONSKIH KONSTRUKCIJA 1  
(B2K3B1)**

Nastavnik: **Prof.dr Snežana Marinković**

Naslov predavanja: **SAVIJANJE\_2**

Datum : 27.10.2021.

---

*Beograd, 2021.*

*Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.*

# Sadržaj

- Uvod
- Osnove proračuna
- Osobine materijala
- Analiza
- ULS-Savijanje
- ULS-Smicanje
- ULS-Torzija
- ULS-Stabilnost
- ULS-Strut&tie modeli
- Trajnost
- Performance based design
- Ploče u jednom pravcu



# ULS – savijanje sa i bez N

*PRESECI ČIJA JE PRITISNUTA POVRŠINA PROIZVOLJNOG OBLIKA*

Dva uslova ravnoteže su na raspolaganju:  $(\sum N = 0; \sum M = 0)$

Dve nepoznate veličine: položaj neutralne linije i količina armature.

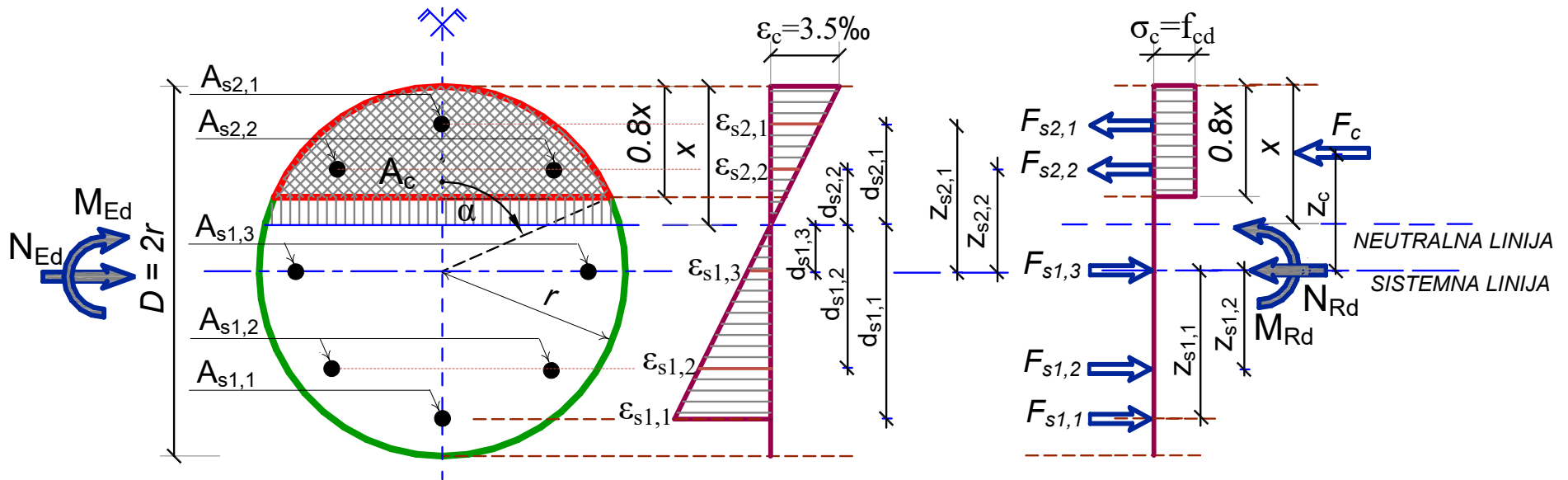
Određivanje **momenta nosivosti** zadatog preseka (iterativno):

- pretpostavlja se položaj neutralne linije  $x$ ;
- sračunava se sila pritiska u betonu na osnovu usvojenog radnog dijagrama za beton;
- sračunavaju se dilatacije svakog reda armature i odgovarajući naponi;
- sa sračunatim silama u betonu i armaturi kontroliše se uslov ravnoteže po aksijalnim silama; ako je zadovoljen, računa se moment nosivosti za zadatu aksijalnu silu; ako nije, pretpostavlja se novo  $x$  i ponavlja procedura.



# ULS – savijanje sa i bez N

## KRUŽNI PRESEK



$$\alpha = \arccos \frac{r - 0.8x}{r} \quad A_c = r^2 \left( \bar{\alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$F_c = f_{cd} A_c = f_{cd} r^2 \left( \bar{\alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$z_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\bar{\alpha} - \sin \alpha \cos \alpha}$$



# ULS – savijanje sa i bez N

## KRUŽNI PRESEK

### - dilatacije u redovima armature

zategnuta armatura:  $\varepsilon_{s1,j} = \varepsilon_c \frac{d_{s1,j}}{x} \quad j = 1,2,3$

pritisnuta armatura:  $\varepsilon_{s2,j} = \varepsilon_c \frac{d_{s2,j}}{x} \quad j = 1,2$

### - naponi u redovima armature

zategnuta armatura:  $\sigma_{s1,j} = \left\{ \begin{array}{l} f_{yd}, \varepsilon_{s1,j} \geq \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_{s1,j} E_s, 0 \leq \varepsilon_{s1,j} < \varepsilon_{yd} \end{array} \right\} \quad j = 1,2,3$

pritisnuta armatura:  $\sigma_{s2,j} = \left\{ \begin{array}{l} f_{yd}, \varepsilon_{s2,j} \geq \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_{s2,j} E_s, 0 \leq \varepsilon_{s2,j} < \varepsilon_{yd} \end{array} \right\} \quad j = 1,2$

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$$



# ULS – savijanje sa i bez N

## KRUŽNI PRESEK

### - sile u redovima armature

zategnuta armatura:  $F_{s1,j} = \sigma_{s1,j} A_{s1,j} \quad j = 1,2,3$

pritisnuta armatura:  $F_{s2,j} = \sigma_{s2,j} A_{s2,j} \quad j = 1,2$

### - uslov ravnoteže po N

$$\sum N = 0: \quad F_c + \sum_{j=1}^2 F_{s2,j} - \sum_{j=1}^3 F_{s1,j} = N_{Ed} \quad \text{iteracije} \rightarrow \boxed{\times}$$

### - moment nosivosti za zadatu $N_{Ed}$

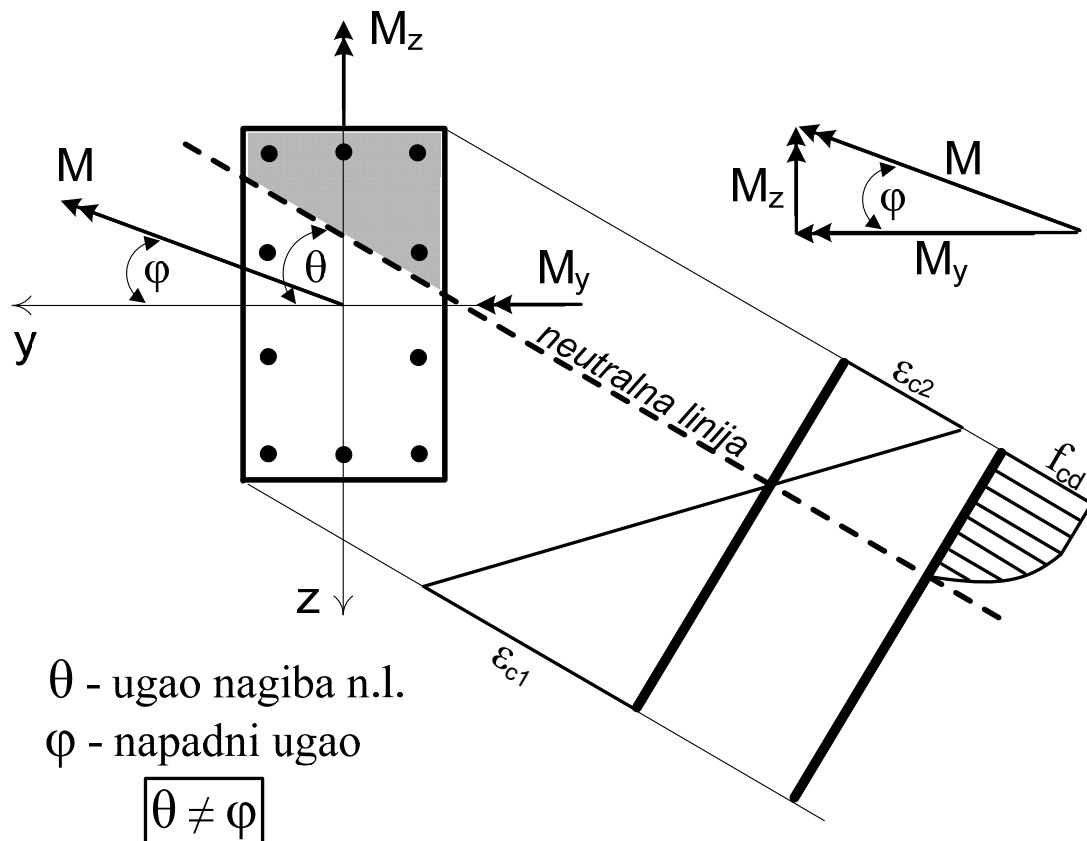
$$F_c z_c + \sum_{j=1}^2 F_{s2,j} z_{s2,j} + \sum_{j=1}^3 F_{s1,j} z_{s1,j} = M_{Rd}$$

DIJAGRAMI  
INTERAKCIJE!



# ULS – savijanje sa i bez N

## KOSO SAVIJANJE



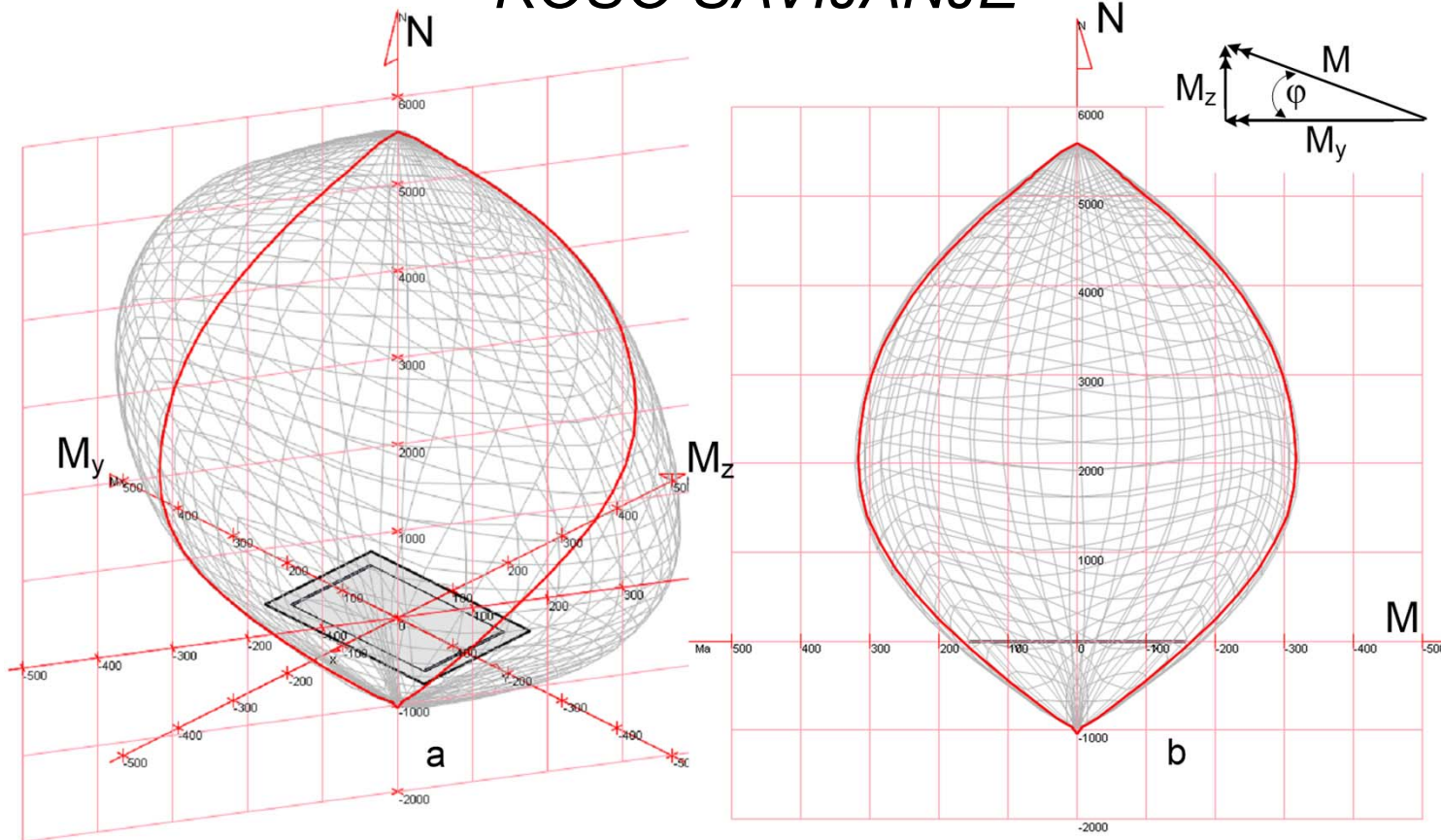
$$\sum N = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

# ULS – savijanje sa i bez N

## KOSO SAVIJANJE

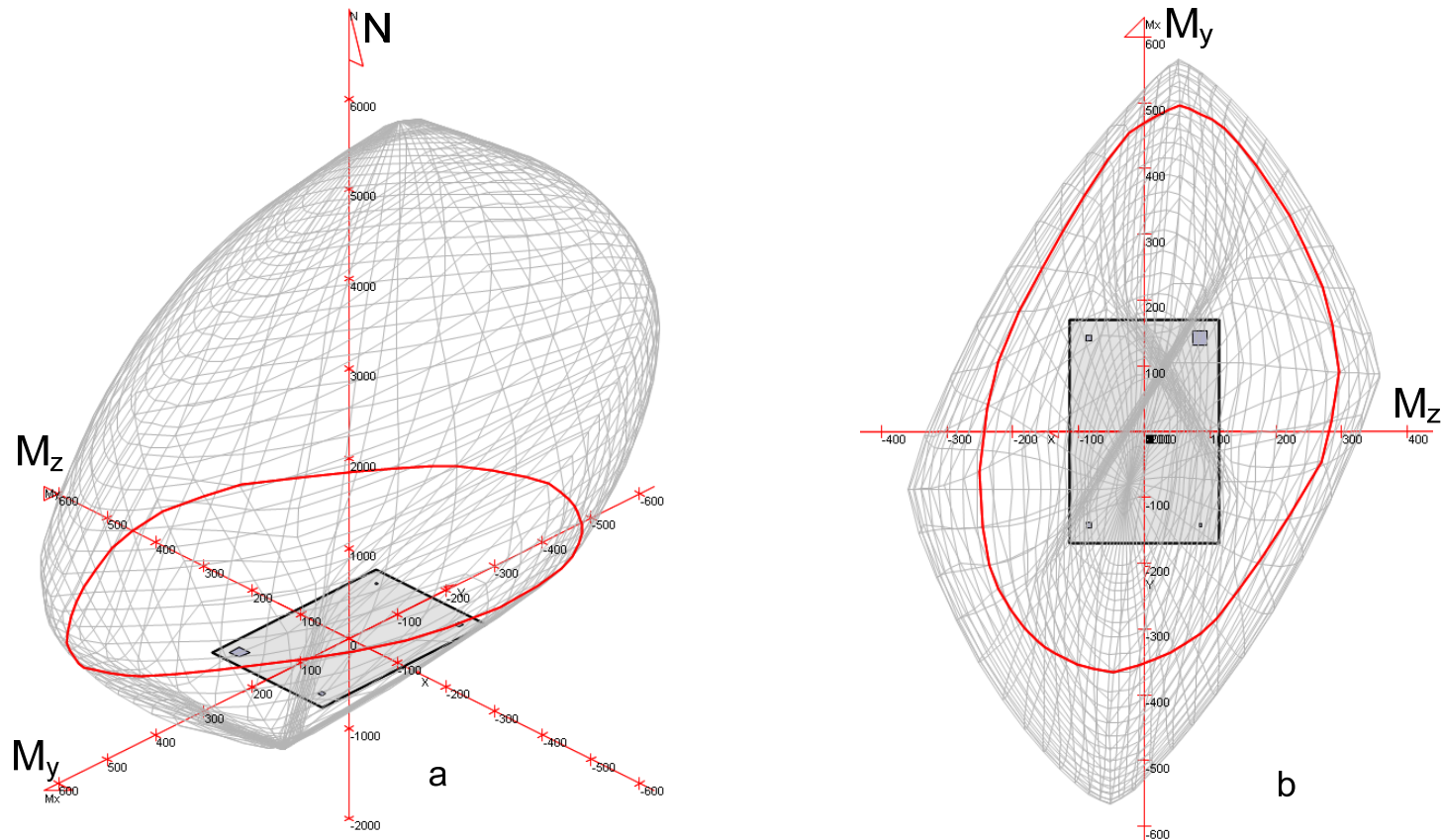


Interakciona površ za simetrično armiran pravougaoni presek (a) i vertikalni presek za određeni napadni ugao - ( $M$ - $N$ ) dijagram (b) (Brujić, 2008)



# ULS – savijanje sa i bez N

## KOSO SAVIJANJE



Interakciona površ za nesimetrično armiran pravougaoni presek (a) i horizontalni presek za određeni intenzitet aksijalne sile - ( $M_z$ - $M_y$ ) dijagram (b) (Brujić, 2008)

# ULS – savijanje sa i bez N

## KOSO SAVIJANJE - EC2

Interakcija  $M_z$ - $M_y$  za kružne, eliptične i pravougaone preseke i za sve nivoe spoljašnje aksijalne sile:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1.0$$

$a$  eksponent:  
za kružne i eliptične preseke  $a = 2$   
za pravougaone preseke:

$N_{Ed}/N_{Rd}$	0.1	0.7	1.0
$a$	1.0	1.5	2.0

uz linearnu interpolaciju za međuvrednosti

$N_{Ed}$  proračunska vrednost aksijalne sile;  
 $N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$ , proračunska aksijalna nosivost preseka



# ULS – savijanje sa i bez N

## *KOSO SAVIJANJE*

Jednostavniji i manje tačan postupak: dekompozicija kosog savijanja na dva jednoaksijalna savijanja, i dimenzionisanje preseka za svaki pravac zasebno. Moguće direktno vezano dimenzionisanje.

Problem: kako raspodeliti aksijalnu silu između dva pravca ?

Nijedna podela aksijalne sile nije fizički opravdana.

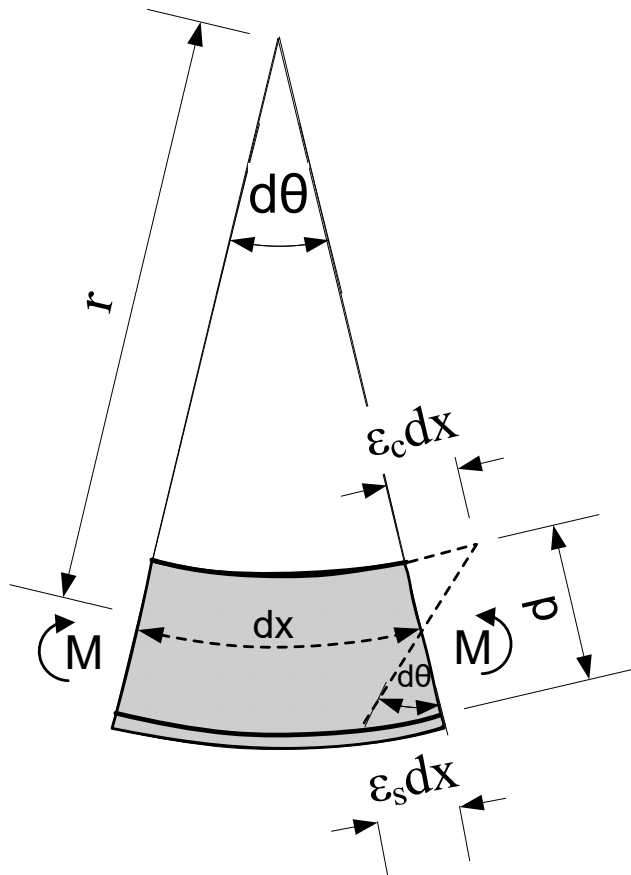
Može da se koristi kao prva iteracija pri primeni nekog tačnijeg postupka, recimo postupka koji preporučuje EC2.

*I PONOVO .....*



vertikalni ( $M-N$ ) ili horizontalni ( $M_z-M_y$ ) preseci interakcione površi

# Krivina AB preseka i veza moment-krivina



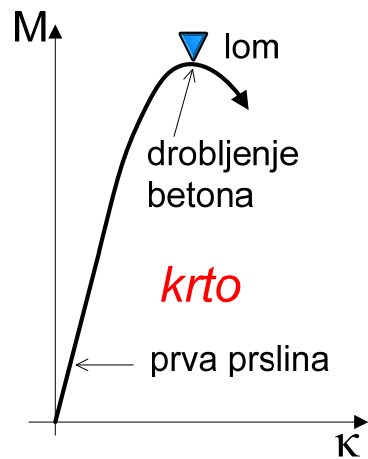
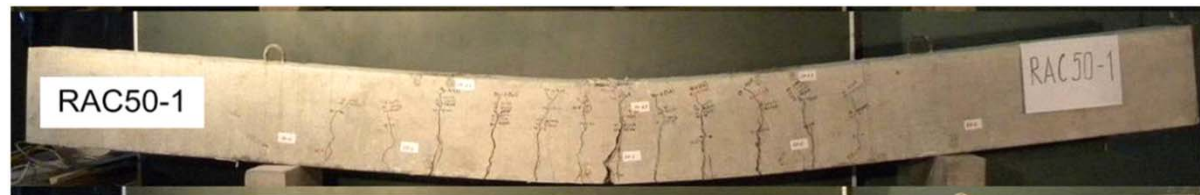
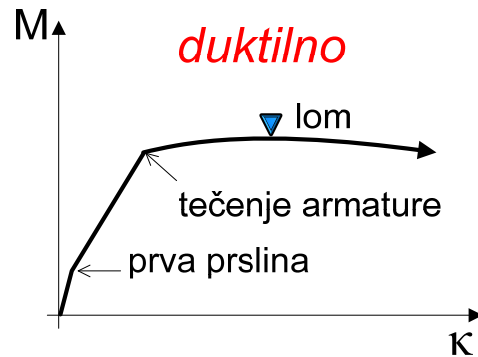
Krivina je rotacija preseka (promena centralnog ugla) po jedinici dužine.

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \kappa$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{(\epsilon_c dx + \epsilon_s dx) / d}{dx} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$$

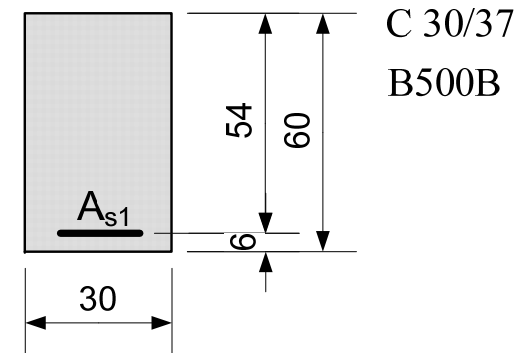
# Krivina AB preseka i veza moment-krivina



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

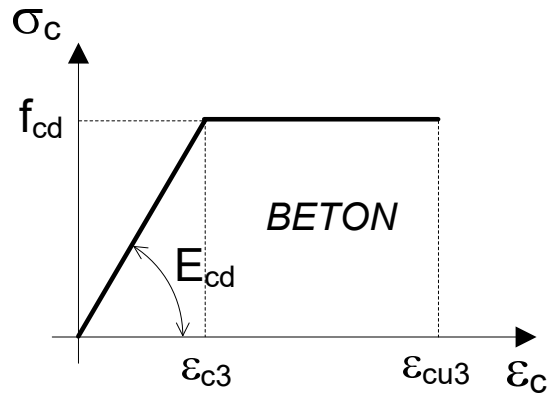
Za zadati presek AB elementa konstruisati dijagram  $M-\kappa$  preseka korišćenjem odredbi EC2, za sledeće količine zategnute armature  $A_{s1}$ :

- a)  $A_{s1} = 0.008 \cdot A_c$
- b)  $A_{s1} = 0.02 \cdot A_c$
- c) maksimalna  $A_{s1}$  prema SRPS EN 1992-1-1/NA;
- d) minimalna  $A_{s1}$  SRPS EN 1992-1-1/NA.



Potrebno je sračunati makar **tri karakteristične tačke**: tačku koja odgovara momentu pojave prslina, tačku koja odgovara početku tečenja armature i tačku koja odgovara lomu preseka. Dovoljno tačnom aproksimacijom stvarnog ponašanja smatraćemo dijagram dobijen spajanjem ovih tačaka pravim linijama.

# Krivina AB preseka i veza moment-krivina



C30/37:

$$f_{cd} = 0.85 \cdot 30 / 1.5 = 17 \text{ MPa}$$

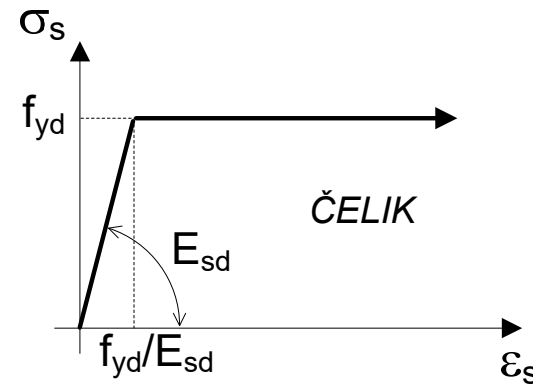
$$\varepsilon_{c3} = 1.75 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{cu3} = 3.5 \text{ ‰}$$

$$E_{cd}^* = f_{cd} / \varepsilon_{c3} = 17 / 1.75 \cdot 10^{-3} = 9.71 \text{ GPa}$$

$$f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$$

\*Nije pravi modul elastičnosti betona već konstanta koja definiše idealizovan  $\sigma - \varepsilon$  dijagram betona.



B500B:

$$f_{yd} = 500 / 1.15 = 435 \text{ MPa}$$

$$E_{sd} = E_s = 200 \text{ GPa}$$

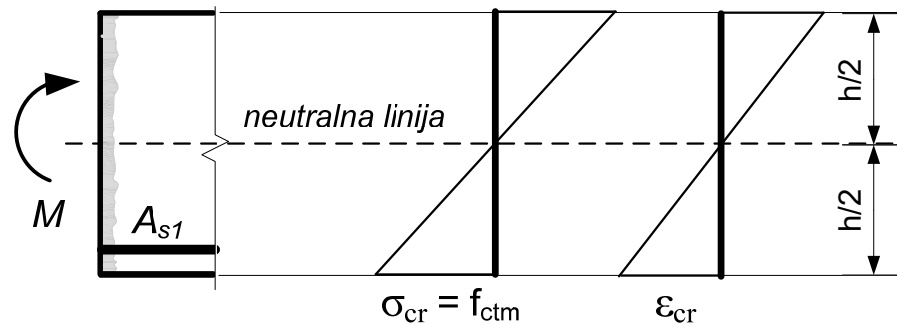
$$\varepsilon_{yd} = 435 / 200000 = 0.002175 = 2.175 \text{ ‰}$$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

a)  $A_{s1} = 0.008 \cdot A_c$

## 1. Tačka koja odgovara momentu pojave prsline



$$M_{cr} = W_c f_{ctm} = \frac{30 \cdot 60^2}{6} 0.29 = 5220 \text{ kNcm} = 52.2 \text{ kNm}$$

$$\epsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E_{cd}^*} = \frac{f_{ctm}}{E_{cd}^*} = \frac{2.9}{9.71 \cdot 10^3} = 2.99 \cdot 10^{-4} = 0.299$$

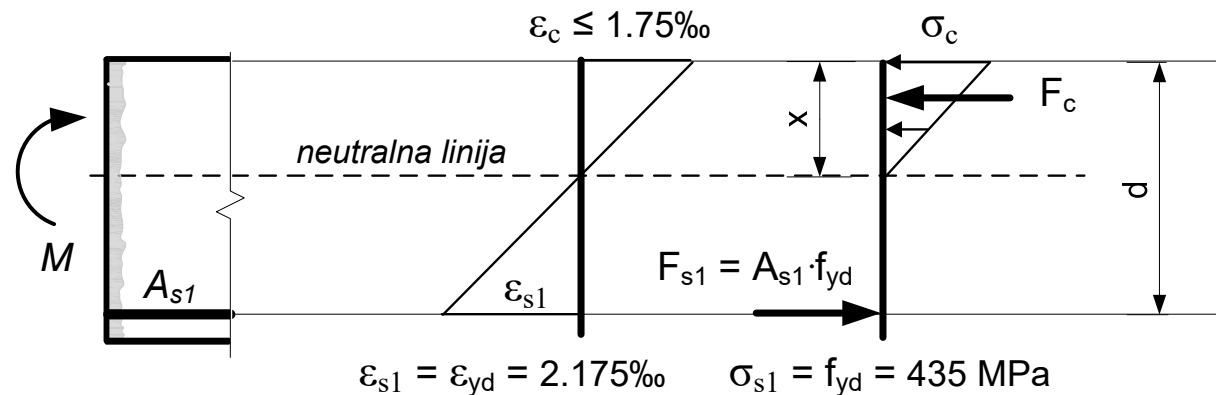
$$\kappa = \frac{\epsilon_{cr}}{\frac{h}{2}} = \frac{2.99 \cdot 10^{-4}}{0.3} = 1.0 \cdot 10^{-3} \frac{1}{m}$$





# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

## 2. Tačka koja odgovara početku tečenja armature



$$F_c - F_{s1} = \frac{1}{2} x \cdot b \cdot \sigma_c - A_{s1} \cdot f_{yd} = 0$$

$$\varepsilon_c = \frac{x}{d-x} \varepsilon_{s1} = \frac{x}{d-x} \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$\sigma_c = E_{cd}^* \cdot \varepsilon_c = E_{cd}^* \frac{x}{d-x} \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{x}{d-x} \frac{f_{yd}}{n^*}$$

$$\frac{1}{2} x \cdot b \frac{x}{d-x} \frac{f_{yd}}{n^*} - A_{s1} \cdot f_{yd} = 0$$



$$x^2 + \frac{2n^* \cdot A_{s1}}{b} x - \frac{2n^* \cdot A_{s1} \cdot d}{b} = 0$$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

$$n^* = \frac{E_s}{E_{cd}^*} \quad n^* = \frac{200}{9.71} = 20.6 \quad A_{s1} = 0.008 \cdot 30 \cdot 60 = 14.4 \text{ cm}^2$$

$$x = 24.3 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_c = \frac{24.3}{54 - 24.3} \cdot 2.175 = 1.78\text{‰} \approx 1.75\text{‰}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{1.788 \cdot 10^{-3}}{0.243} = 7.3 \cdot 10^{-3} \frac{1}{m}$$

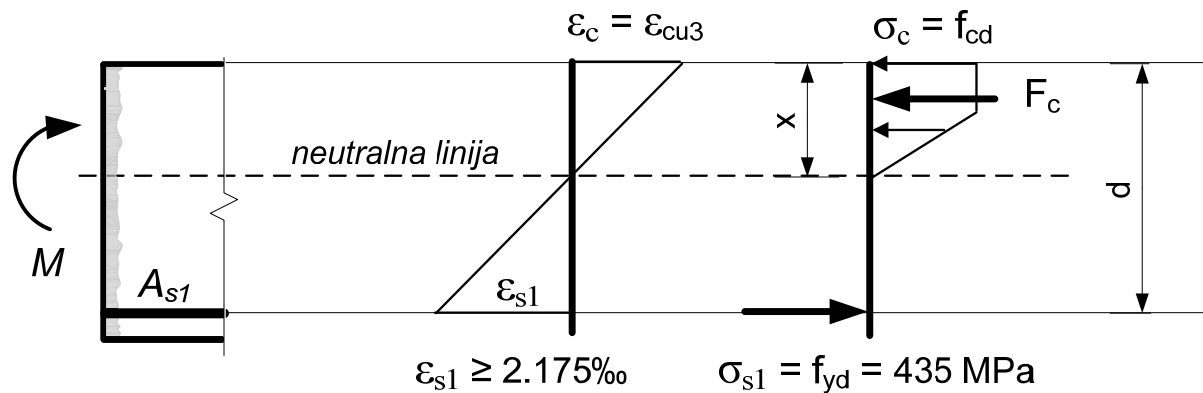
$$M - F_c \left( d - \frac{x}{3} \right) = M - A_{s1} f_{yd} \left( d - \frac{x}{3} \right) = 0$$

$$M = 14.4 \cdot 43.5 \left( 54 - \frac{24.3}{3} \right) = 28752 \text{ kNcm} = 287.5 \text{ kNm}$$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

## 3. Tačka koja odgovara lomu preseka



$$F_c - F_{s1} = 0.75 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} - A_{s1} \cdot f_{yd} = 0$$

$$x = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{0.75 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{14.4 \cdot 43.5}{0.75 \cdot 30 \cdot 1.7} = 16.4 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{d - x}{x} \varepsilon_c = \frac{54 - 16.4}{16.4} 3.5 = 8.02\text{‰} > 2.175\text{‰}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{0.164} = 21.3 \cdot 10^{-3} \frac{1}{m}$$

$$M = A_{s1} f_{yd} \left( d - \frac{7}{18} x \right) = 298.3 \text{ kNm}$$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

Dakle, koordinate tri tačke potrebne za konstruisanje M- $\kappa$  dijagrama za ovaj presek su:

- prslina  $(M; \kappa) = (52.2 \text{ kNm}; 1.0 \cdot 10^{-31}/\text{m})$
- tečenje armature  $(M; \kappa) = (287.5 \text{ kNm}; 7.3 \cdot 10^{-31}/\text{m})$
- lom  $(M; \kappa) = (298.3 \text{ kNm}; 21.3 \cdot 10^{-31}/\text{m})$

Faktor duktilnosti krivine:

$$\frac{\kappa_u}{\kappa_y} = \frac{21.3 \cdot 10^{-3}}{7.3 \cdot 10^{-3}} = 2.9$$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

$$b) A_{s1} = 0.02 \cdot A_c$$

- prslina  $(M; \kappa) = (52.2 \text{ kNm}; 1.0 \cdot 10^{-31}/\text{m})$
- lom  $(M; \kappa) = (542.7 \text{ kNm}; 9.9 \cdot 10^{-31}/\text{m})$   $\varepsilon_{s1} = 1.87 < 2.175 \text{ ‰}$

$$c) A_{s1, \max} = 0.473bd \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0.473 \cdot 30 \cdot 54 \cdot \frac{17}{435} = 29.95 \text{ cm}^2 = 0.017 A_c$$

- prslina  $(M; \kappa) = (52.2 \text{ kNm}; 1.0 \cdot 10^{-31}/\text{m})$
- lom  $(M; \kappa) = (525.7 \text{ kNm}; 10.4 \cdot 10^{-31}/\text{m})$   $\varepsilon_{s1} = 2.142 < 2.175 \text{ ‰}$



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina

$$d) \quad A_{s1,\min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bd = 0.26 \cdot \frac{2.9}{500} \cdot 30 \cdot 54 = 2.44 \text{ cm}^2 = 0.0014 A_c$$

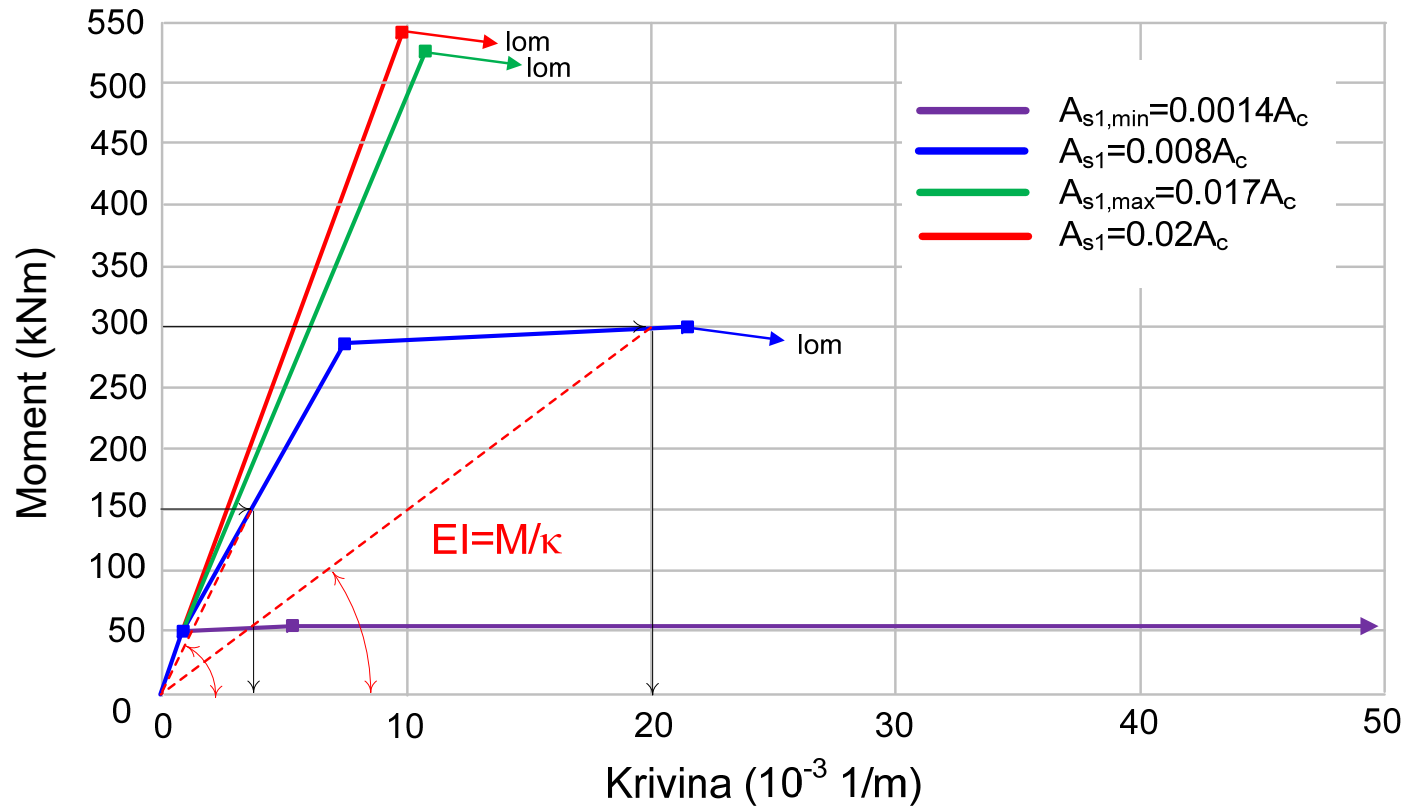
- prslina  $(M; \kappa) = (52.2 \text{ kNm}; 1.0 \cdot 10^{-3} 1/m)$
- tečenje armature  $(M; \kappa) = (53.1 \text{ kNm}; 5.2 \cdot 10^{-3} 1/m)$
- lom  $(M; \kappa) = (56.2 \text{ kNm}; 125 \cdot 10^{-3} 1/m)$

Faktor duktilnosti krivine:

$$\frac{\kappa_u}{\kappa_y} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{5.2 \cdot 10^{-3}} = 24$$



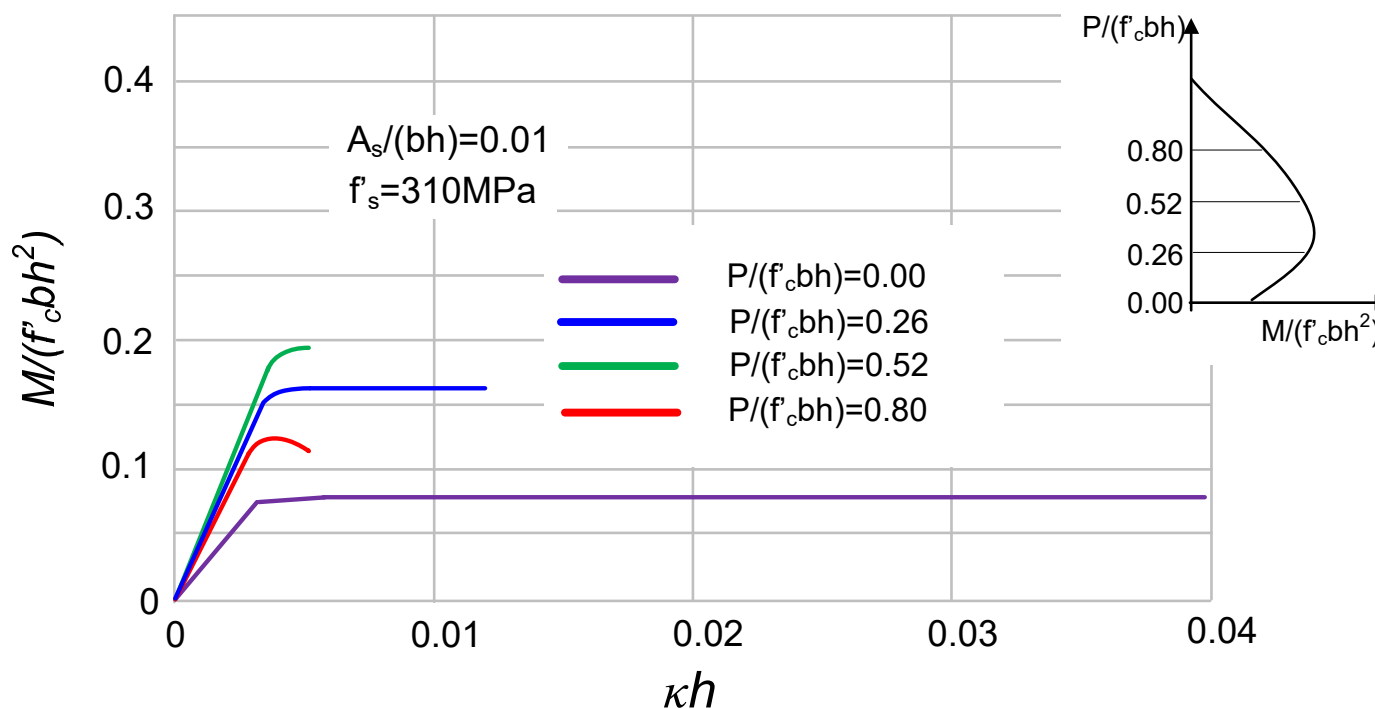
# Krivina AB preseka i veza moment-krivina



Dijagrami  $M-k$  za presek sa različitim količinama armature



# Krivina AB preseka i veza moment-krivina



Dijagrami  $M-\kappa$  za presek sa različitim nivoima aksijalne sile pritiska (Park i Pauley, 1975)