



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **GRAĐEVINARSTVO**
Modul: **KONSTRUKCIJE**
Godina/Semestar: **3 godina / 5 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **TEORIJA BETONSKIH KONSTRUKCIJA 1
(B2K3B1)**

Nastavnik: **Prof.dr Snežana Marinković**

Naslov predavanja: **STRUT&TIE**

Datum : 01.12.2021.

Beograd, 2021.

Sva autorska prava autora prezentacije i/ili video snimaka su zaštićena. Snimak ili prezentacija se mogu koristiti samo za nastavu na daljinu studenta Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu u školskoj 2021/2022 i ne mogu se koristiti za druge svrhe bez pismene saglasnosti autora materijala.

Sadržaj

- Uvod
- Osnove proračuna
- Osobine materijala
- Analiza
- ULS-Savijanje
- ULS-Smicanje
- ULS-Torzija
- ULS-Stabilnost
- ULS-Strut&tie modeli
- Trajnost
- Performance based design
- Ploče u jednom pravcu



ULS – strut&tie

Metoda pritisnutih štapova i zatega se zasniva na modeliranju punog nosača (ili nekog njegovog dela) sistemom centrično pritisnutih i centrično zategnutih štapova i čvorova u kojima se oni susstiču, u stanju loma. Preporučuje u slučajevima kada raspodela dilatacija u preseku značajno odstupa od linearne, odnosno kada ne važi Bernulijeva hipoteza.

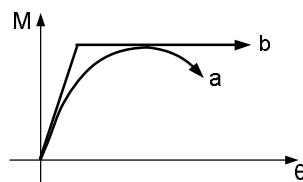
Tipični primeri nelinearne raspodele dilatacija su oblasti u konstrukcijama gde deluju koncentrisane sile, gde postoje geometrijski diskontinuiteti kao što su uglovi, otvori, čvorovi, oslonci i konstrukcije u kojima je izraženo ravno stanje napona, kao što su zidni nosači. Ove oblasti se nazivaju **D-zone**. Van ovih oblasti, gde raspodela dilatacija postaje linearna, analiza se vrši na osnovu uobičajenog grednog ili rešetkastog modela. Ove oblasti se nazivaju **B-zone**.



ULS – strut&tie

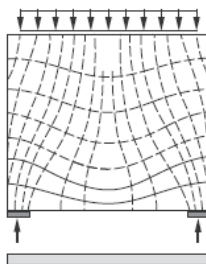
Primena **statičke teoreme teorije plastičnosti**: svaka statički dopustiva raspodela napona, dakle raspodela koja zadovoljava uslove ravnoteže i konturne uslove po silama, i nigde ne prekoračuje uslove tečenja (nosivosti), daje donju granicu opterećenja loma.

Sistem štapova i zatega koji predstavlja unutrašnje sile, mora se izabrati tako da deformacijski kapacitet betona nigde ne bude prekoračen, pre nego što je dostignuto pretpostavljeno stanje napona u ostatku konstrukcije.

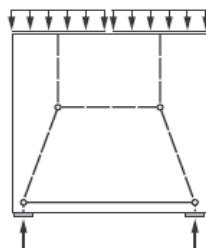


ULS – strut&tie

Ovo je najlakše ispuniti ako se pri formiranju modela prati **elastična raspodela** napona – neisprskalo stanje.



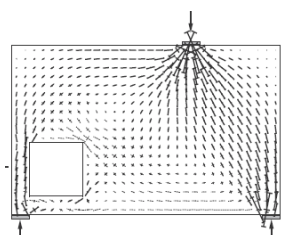
trajektorije napona



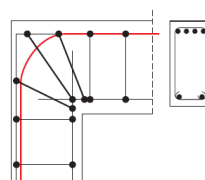
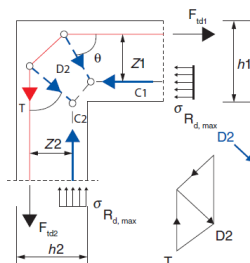
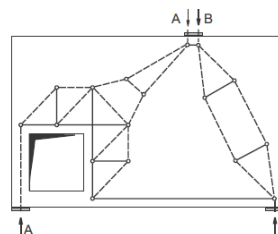
model



ULS – strut&tie



otvori



uglovi



ULS – strut&tie

Postupak proračuna:

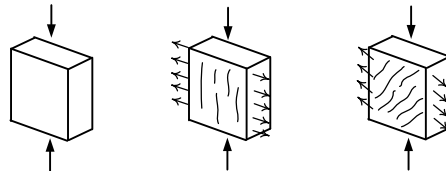
- pretpostavlja se geometrija *D-zone*;
- skicira se model, u prvoj aproksimaciji pravci pritisnutih štapova treba da odgovaraju trajektorijama napona pritiska u elastičnom, neisprskalom stanju;
- računaju se sile u štapovima i zategama modela iz uslova ravnoteže sa spoljašnjim opterećenjem;
- određuje se i proverava poprečni presek štapova i zatega (iz naponskih uslova);
- određuje se geometrija čvorova i proveravaju naponi; usvajaju principi armiranja;
- model treba profiniti ako je neophodno;
- čvorovi, štapovi i zatege konačnog modela moraju biti u skladu sa detaljima armiranja.



ULS – strut&tie

PRITISNUTI ŠTAPOVI I ODREDBE SRPS EN-1992-1-1

Maksimalni napon pritiska koji se može razviti u pritisnutom štapu značajno zavisi od njegovog stanja napona.

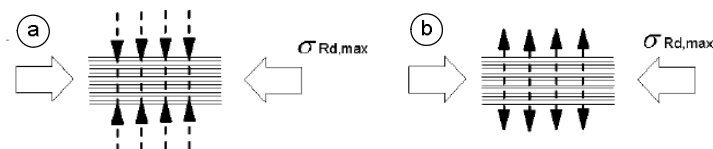


Poprečni naponi pritiska povećavaju nosivost štapa, pogotovo ako deluju u oba poprečna pravca. Poprečno zatezanje smanjuje nosivost štapa, naročito ako ne deluje upravno na štap.



ULS – strut&tie

SRPS EN-1992-1-1



$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} = 0.85 \cdot f_{ck} / \gamma_c$$

$$\sigma_{Rd,max} = 0.51 \cdot f_{ck} \cdot (1 - f_{ck} / 250) / \gamma_c$$

$$\sigma_{Rd,max} = 0.6 \cdot v' \cdot f_{cd}$$

$$v' = 1 - f_{ck} / 250$$

ULS – strut&tie

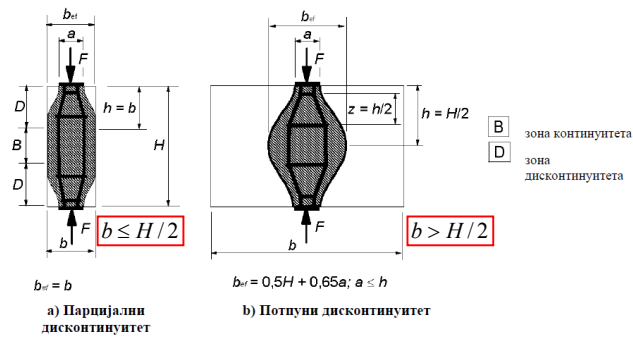
ZATEGE I ODREDBE SRPS EN-1992-1-1

Proračunska čvrstoća zatega od armature je jednaka proračunskoj vrednosti granice ravlachenja čelika, f_{yd} . Armatura mora biti odgovarajuće usidrena u čvorovima. Zahtevana armatura za uravnoteženje sila u čvorovima može biti diskretno raspoređena, ili raspoređena na izvesnoj dužini.

U drugom slučaju, armatura treba da se rasporedi na dužini na kojoj su trajektorije napona pritiska zakrivljene, jer se u toj zoni javljaju naponi zatezanja ("cepanje"). Ukupna sila zatezanja se, prema EC2, može sračunati kao:

ULS – strut&tie

SRPS EN-1992-1-1



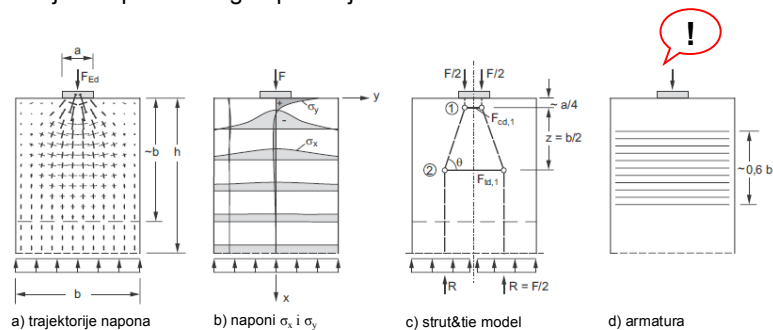
$$T = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F$$

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - 0.7 \frac{a}{h} \right) F$$



ULS – strut&tie

Ovakvo naponsko stanje nastaje kod **lokalno opterećenih površina**, kada se koncentrisano opterećenje prenosi preko male površine na veću. Armatura potrebna za prihvatanje “cepanja” se ravnomerno raspoređuje na dužini krivljenja, koja je jednaka, otprilike, $0.6b$. Tipično za vezu stuba i temelja i zonu unošenja sile prethodnog naprezanja u nosač.



ULS – strut&tie

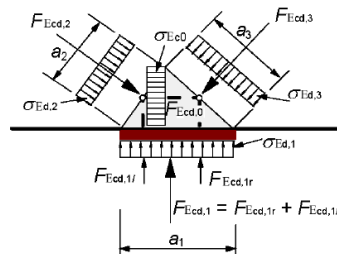
ČVOROV I ODREDBE SRPS EN-1992-1-1

Čvorovi su zone u kojima se susište pritisnuti štapovi i zatege. Njihove dimenzije određuje geometrija štapova, zatega i spoljnih sila. Čvorovi moraju biti centrisani i u ravnoteži. EC2 daje proračunske vrednosti maksimalnih napona pritiska za tri različite vrste čvorova, u zavisnosti od toga da li u čvoru ima zatezanja ili ne.



ULS – strut&tie

a) pritisnuti čvorovi u kojima nema zatega usidrenih u čvoru (CCC čvor)



$$\sigma_{Rd,max} = k_1 \cdot v' \cdot f_{cd}$$

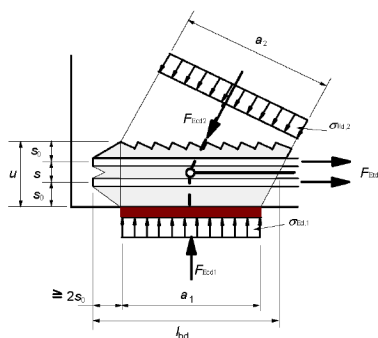
$$v' = 1 - f_{ck} / 250$$

$$k_1 = 1.0$$



ULS – strut&tie

b) pritisnuto-zategnuti čvorovi, u kojima su zatege usidrene samo u jednom pravcu (CCT čvor)



$$\sigma_{Rd,max} = k_2 \cdot v' \cdot f_{cd}$$

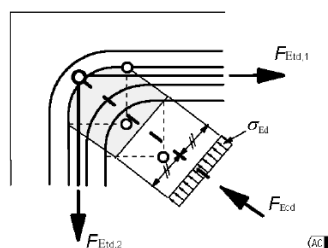
$$v' = 1 - f_{ck} / 250$$

$$k_2 = 0.85$$



ULS – strut&tie

c) pritisnuto-zategnuti čvorovi, sa usidrenim zategama u više pravaca (CTT čvor)



$$\sigma_{Rd,max} = k_3 \cdot v' \cdot f_{cd}$$

$$v' = 1 - f_{ck} / 250$$

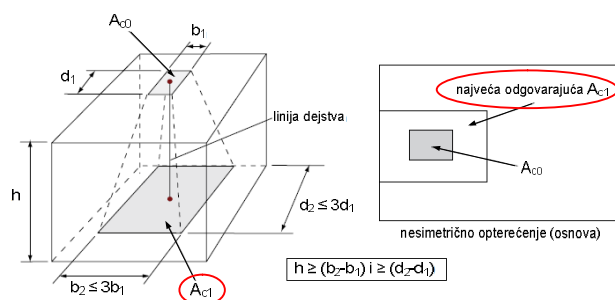
$$k_3 = 0.75$$



ULS – strut&tie

LOKALNO OPTEREĆENE POVRŠINE I ODREDBE SRPS EN-1992-1-1

Mora se proveriti lokalni lom usled pritiska i poprečne sile zatezanja se moraju prihvatiti armaturom.



ULS – strut&tie

Za jednako podeljeno opterećenje koje deluje na površini A_{c0} , granična sila pritiska se može odrediti iz:

$$F_{Rdu} = A_{c0} \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{A_{c1} / A_{c0}} \leq 3.0 \cdot f_{cd} \cdot A_{c0}$$

- A_{c0} opterećena površina;
 A_{c1} najveća proračunska površina na koju se raspodeljuje opterećenje, čiji je oblik sličan sa A_{c0} .

Proračunska površina A_{c1} na koju se opterećenje raspodeljuje, se određuje pod pretpostavkom da se opterećenje rasprostire pod uglom od 45°; njeno središte treba da bude na pravcu dejstva sile kroz središte opterećene površine A_{c0} ; ako postoji više od jedne sile pritiska koja deluje na poprečni presek betona, proračunske površine na koje se raspodeljuje opterećenje ne treba da se preklapaju.

ULS – strut&tie

Poprečno zatezanje koje se javlja usled krivljenja trajektorija napona pritiska treba da se prihvati armaturom, u oba poprečna pravca. Ova armatura se računa na osnovu sile zatezanja koja se dobija iz modela pritisnutih štapova i zatega:

$$\cot \theta = \frac{b/4 - a/4}{b/2} = \frac{1}{2} \frac{b-a}{b}$$



$$F_{td,1} = \frac{F_{Ed}}{2} \cot \theta = \frac{F_{Ed}}{4} \frac{b-a}{b}$$

što je izraz koji EC2 daje za slučaj parcijalnog diskontinuiteta.

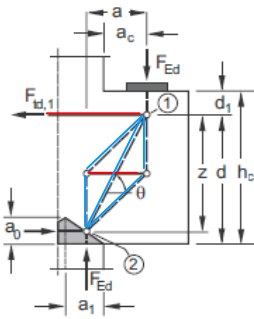


ULS – strut&tie

KRATKI ELEMENTI I ODREDBE SRPS EN-1992-1-1

Pod kratkim elementima se, prema EC2, podrazumevaju kratke konzole za koje važi:

$$a_c \leq z$$

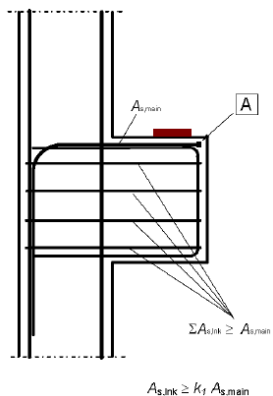


Ovi elementi mogu da se proračunaju primenom metode pritisnutih štapova i zatega, pri čemu se nagib pritisnutih štapova usvaja u granicama $1.0 \leq \tan \theta \leq 2.5$.



ULS – strut&tie

Kratki elementi se armiraju u zavisnosti od odnosa a_c/h_c .



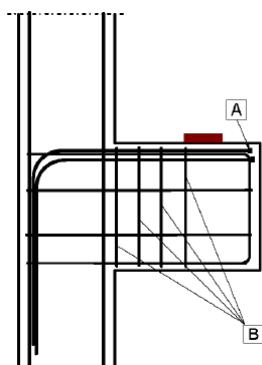
Ako je $a_c < 0.5h_c$, treba da se obezbede zatvorene horizontalne ili kose uzengije, površine $A_{s,lnk}$:

$$A_{s,lnk} \geq 0.25 \cdot A_{s,main}$$

gde je $A_{s,main}$ glavna armatura za zatezanje (za silu $F_{td,1}$ koja potiče od momenta savijanja u merodavnom preseku).



ULS – strut&tie



Ako je $a_c > 0.5h_c$ i $F_{Ed} > V_{Rd,c}$, treba da se obezbede zatvorene vertikalne uzengije, površine $A_{s,lnk}$:

$$A_{s,lnk} \geq 0.5 \cdot F_{Ed} / f_{yd}$$

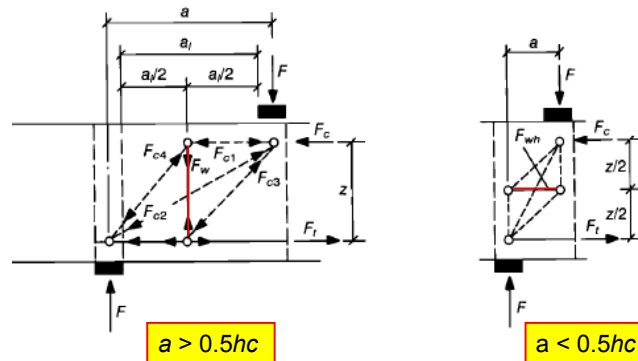
i naravno, glavnu armaturu za zatezanje $A_{s,main}$ (za silu $F_{td,1}$ koja potiče od momenta savijanja u merodavnom preseku).



ULS – strut&tie

KONCENTRISANO OPTEREĆENJE U BLIZINI OSLOMCA - grede

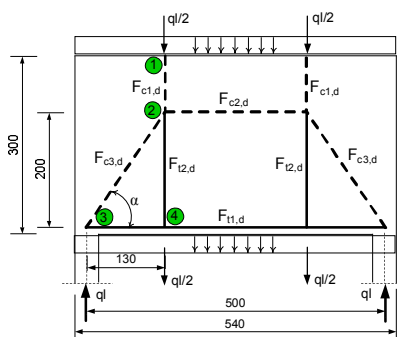
Ove oblasti se modeliraju i armiraju na isti način kao kratki elementi.



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ ($h/l > 0.33$)

Sračunati potrebnu armaturu zadatog visokog (zidnog) nosača primenom metode pritisnutih štapova i zatega. Podaci:



$$q_{gore,Ed} = q_{dole,ED} = 150 \text{ kN/m}$$

$$C30/37 \Rightarrow f_{cd} = 0.85 \cdot 30 / 1.5 = 17.0 \text{ MPa}$$

$$B450C \Rightarrow f_{yd} = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ MPa}$$

$$h = 25 \text{ cm}$$

$$\text{stub} : 40 / 25 \text{ cm}$$

Usvojeno je da je krak unutrašnjih sila jednak $0.67h$, što određuje položaj pritisnutog štapa F_{c2} .



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ

Maksimalni napon pritiska u pritisnutim štapovima F_{c1} , F_{c2} i F_{c3} :

$$\sigma_{Rd,max} = 0.6 \cdot v' \cdot f_{cd} = 0.6 \cdot (1 - 30/250) \cdot 17.0 = 8.98 \text{ MPa}$$

Maksimalni napon pritiska u čvoru 2 (CCC čvor, armatura F_{t2} nije usidrena u čvoru):

$$\sigma_{2Rd,max} = (1 - 30/250) \cdot 17.0 = 14.96 \text{ MPa}$$

Maksimalni napon pritiska u čvoru 3 (CCT čvor, glavna armatura je ankerovana u njemu):

$$\sigma_{3Rd,max} = 0.85 \cdot (1 - 30/250) \cdot 17.0 = 12.72 \text{ MPa}$$

Sile u štapovima modela:

Oslonačka reakcija: $R_d = 2 \cdot 150 \cdot 5.4 / 2 = 810 \text{ kN}$

Ravnateža čvora 1: $F_{c1,d} = 150 \cdot 5.4 / 2 = 405 \text{ kN}$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ

Ravnateža čvora 3:

$$\alpha = \arctg \frac{2}{1.3} = 56.98$$

$$F_{c3,d} = R_d / \sin \alpha = 810 / \sin 56.98 = 966 \text{ kN}$$

$$F_{t1,d} = F_{c3,d} \cos \alpha = 966 \cdot \cos 56.98 = 526.4 \text{ kN}$$

Ravnateža čvora 2:

$$F_{c2,d} = F_{c3,d} \cos \alpha = F_{t1,d} = 526.4 \text{ kN}$$

Ravnateža čvora 4:

$$F_{t2,d} = 150 \cdot 5.4 / 2 = 405 \text{ kN}$$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ

Dimenzionisanje armature:

Armatura potrebna za zategu $F_{t1,d}$:

$$A_{s1} = \frac{526.4}{39.13} = 13.45 \text{ cm}^2 \quad \text{usv. } 6\text{Ø}18 \text{ (15.24 cm}^2\text{)}$$

raspoređuje se na visini $0.12h = 36\text{cm}$.

Armatura potrebna za zategu $F_{t2,d}$:

$$A_{s1} = \frac{405}{39.13} = 10.35 \text{ cm}^2 \quad \text{usv. } 4\text{Ø}20 \text{ (12.56 cm}^2\text{)}$$

Na svakoj strani nosača usvaja se ortogonalna mreža sa minimalnom površinom (u svakom pravcu):

$$A_{s,\min} = 0.001 \cdot A_c = 0.001 \cdot 300 \cdot 25 = 7.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Horizontalna armatura: } 7.5/3.0 = 2.5 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$\text{Vertikalna: } 7.5/5.45 = 1.38 \text{ cm}^2 / \text{m} < 1.5 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \text{usv. } Q257 \text{ (2.57 cm}^2\text{/m)}$$

na obe strane nosača

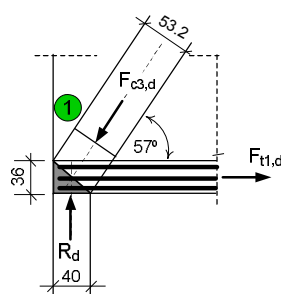


ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ

Kontrola napona u čvoru 1

Geometrija čvora 1 određena je širinom oslonačkog stuba, visinom na kojoj je raspoređena armatura za zategu $F_{t1,d}$, uglom nagiba pritisnutog štapa $F_{c3,d}$ i debljinom nosača.



Ovo je CCT čvor:

$$\sigma_{c1,d} = \frac{810}{40 \cdot 25} = 0.81 \text{ kN/cm}^2 = 8.1 \text{ MPa} < 12.72 \text{ MPa}$$

Napon σ_{c3} se ne kontroliše jer je merodavan napon u pritisnutom štapu.



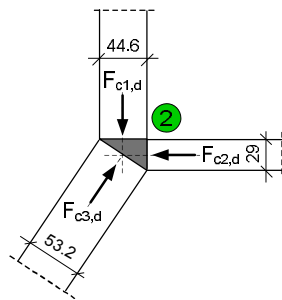
ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 1: VISOKI NOSAČ

Kontrola napona u čvoru 2

Ovo je CCC čvor, pa je: $\sigma_{2Rd,max} = 14.96MPa$

Naponi u čvoru se ne kontrolišu jer su merodavni naponi u pritisnutim štapovima.



Kontrola napona u štapovima 1, 2 i 3

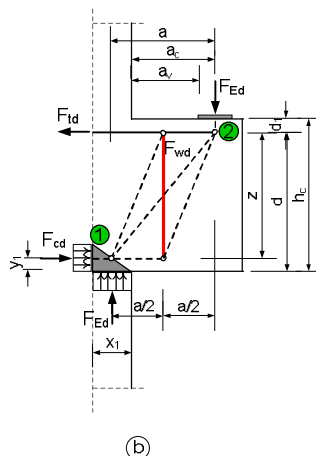
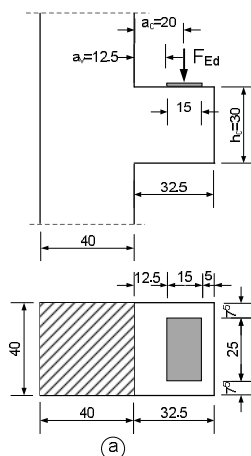
$$\sigma_{Rd,max} = 8.98MPa$$

- ✓ $\sigma_{c1,d} = \frac{405}{44.6 \cdot 25} = 0.36kN/cm^2 = 3.6MPa < 8.98MPa$
- ✓ $\sigma_{c2,d} = \frac{526.4}{29 \cdot 25} = 0.73kN/cm^2 = 7.3MPa < 8.98MPa$
- ✓ $\sigma_{c3,d} = \frac{966}{53.2 \cdot 25} = 0.73kN/cm^2 = 7.3MPa < 8.98MPa$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: KRATKI ELEMENT, $a_c > 0.5h_c$



Sračunati potrebnu armaturu kratkog elementa:

$$F_{Ed} = 500kN$$

$$C35/45$$

$$B450C$$

$$f_{cd} = 0.85 \cdot 35 / 1.5 = 19.83MPa$$

$$f_{yd} = 450 / 1.15 = 391.3MPa$$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: *KRATKI ELEMENT, $a_c > 0.5h_c$*

Maksimalni napon pritiska u čvoru 1 (CCC čvor):

$$\sigma_{1Rd,max} = (1 - 35 / 250) \cdot 19.83 = 17.05 \text{ MPa}$$

Maksimalni napon pritiska u čvoru 2 (CCT čvor, glavna armatura je ankerovana u njemu):

$$\sigma_{2Rd,max} = 0.85 \cdot (1 - 35 / 250) \cdot 19.83 = 14.50 \text{ MPa}$$

Dimenzije čvora 1:

$$x_1 = \frac{F_{Ed}}{\sigma_{1Rd,max} \cdot b} = \frac{500}{1.705 \cdot 40} = 7.3 \text{ cm}$$

Čvor 1 se nalazi na $x_1/2 = 7.3/2 = 3.65$ cm od unutrašnje ivice stuba.



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: *KRATKI ELEMENT, $a_c > 0.5h_c$*

Pretpostavljeno $d_f = 4.0$ cm. Krak unutrašnjih sila je približno:

$$z \approx 0.8 \cdot d = 0.8 \cdot (30 - 4) = 20.8 \text{ cm}$$

Iz ravnoteže momenata oko tačke 1:

$$F_{cd} = F_{td} = \frac{500 \cdot (0.2 + 0.0365)}{0.208} = 568.5 \text{ kN}$$

Kontrola napona na vertikalnoj strani čvora 1:

$$y_1 = 0.2 \cdot d = 0.2 \cdot (30 - 4) = 5.2 \text{ cm}$$

$$\sigma = \frac{F_{cd}}{2 \cdot y_1 \cdot b} = \frac{568.5}{2 \cdot 5.2 \cdot 40} = 1.37 \text{ kN / cm}^2 = 13.7 \text{ MPa} < \sigma_{1Rd,max} = 17.05 \text{ MPa}$$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: KRATKI ELEMENT, $a_c > 0.5h_c$

Dimenzionisanje armature:

Glavna zategnuta armatura – zatega F_{td} :

$$A_{s,main} = \frac{F_{td}}{f_{yd}} = \frac{568.5}{39.13} = 14.53 \text{ cm}^2 \quad \text{usv. } 5\text{Ø}20 \text{ (15.70 cm}^2\text{)}$$

Sekundarna vertikalna armatura – zatega F_{wd} :

Model štapova i zatega je statički neodređen: uvodi se pretpostavka da postoji linearna zavisnost između sile u vertikalnoj zatezi F_{wd} i veličine a , tako da je $F_{wd} = 0$ za $a = z/2$ i $F_{wd} = F_{Ed}$ za $a = 2z$.

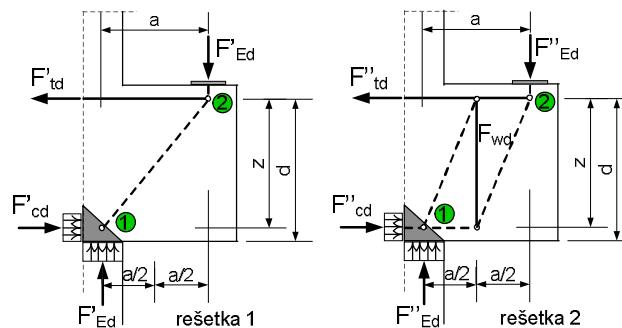
$$F_{wd} = F_{w1} \cdot a + F_{w2}$$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: KRATKI ELEMENT, $a_c > 0.5h_c$

Nosivost u slučaju $a \leq z/2$ se može modelirati samo rešetkom 1, a u slučaju $a \geq 2z$ samo rešetkom 2 prikazanom na sledećoj slici.



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: **KRATKI ELEMENT**, $a_c > 0.5h_c$

$$F_{wd}\left(a = \frac{z}{2}\right) = 0 \quad F_{wd}(a = 2 \cdot z) = F_{Ed}$$

$$F_{w1} = \frac{3}{2} \frac{F_{Ed}}{z} \quad F_{w2} = -\frac{F_{Ed}}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{wd} = \frac{2}{3} \frac{F_{Ed}}{z} \cdot a - \frac{F_{Ed}}{3} = F_{Ed} \frac{2 \cdot \frac{a}{z} - 1}{3}$$

$$a = 20 + 3.65 = 23.65 \text{ cm}$$

$$A_{sw} = \frac{F_{wd}}{f_{yd}} = \frac{212.3}{39.13} = 5.42 \text{ cm}^2 < 0.5 \cdot \frac{500}{39.13} = 6.39 \text{ cm}^2 \quad \text{usv. } 4\Phi 10 \text{ (6.40 cm}^2\text{)} \\ \text{(uzengije)}$$

Kontrola napona na horizontalnoj strani čvora 2, ispod pločice za prenošenje opterećenja dimenzija 15 x 25cm:

$$\sigma = \frac{F_{Ed}}{15 \cdot 25} = \frac{500}{15 \cdot 25} = 1.33 \text{ kN/cm}^2 = 13.3 \text{ MPa} < \sigma_{2Rd,max} = 14.5 \text{ MPa} \quad \checkmark$$



ULS – strut&tie

BROJNI PRIMER 2: **KRATKI ELEMENT**, $a_c > 0.5h_c$

