



Универзитет у Београду – Грађевински
факултет www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГРАЂЕВИНАРСТВО МАСТЕР АКАДЕМСКЕ СТУДИЈЕ**

Модул: **КОНСТРУКЦИЈЕ**

Година/Семестар: **I година / I семестар**

Назив предмета (шифра): **БЕТОНСКИ МОСТОВИ (M0K1BM)**

Наставник: **доц. др Јелена Царевић**

Наслов вежби: **Оптерећења мостова; Расподела оптерећења**

Датум: 25.11.2025.

Београд, 2025.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимак или презентација се могу користити само за наставу студената Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2023/2024 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

Грађевински факултет Универзитета у
Београду, 2023.

Вежба 2

- Садржај:

1. Прописи и правилници за оптерећења;
2. Анализа оптерећења на мостовима;
3. Расподела оптерећења:

3.1. Увод

3.2. Пример 1 – Широки друмски мост са два главна носача

3.3. Пример 2 – Широки друмски мост са више главних носача

Прописи и правилници за оптерећења

Европски прописи (на снази од јануара 2020. године) - Еврокодovi (EN)

EN 1991

- EN 1991-1-1 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-1: Општа дејства — **Запреминске тежине, сопствена тежина, корисна оптерећења за зграде;**
- EN 1991-1-3 - Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-3: Општа дејства — **Оптерећења снегом;**
- EN 1991-1-4 -Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-4: Општа дејства — **Дејства ветра;**
- EN 1991-1-5 -Еврокод 1 — Дејства на конструкције — Део 1-5: Општа дејства — **Топлотна дејства;**

Прописи и правилници за оптерећења

Европски прописи (на снази од јануара 2020. године) -
Еврокодови (EN)

EN 1991

- EN 1991-1-6 - Еврокод 1 - Дејства на конструкције - Део 1-6: Општа дејства - **Дејства током извођења;**
- EN 1991-1-7 -Еврокод 1 - Дејства на конструкције - Део 1-7: Општа дејства - **Инцидентна дејства;**
- EN 1991-2 - Еврокод 1: Дејства на конструкције - Део 2: **Саобраћајно оптерећење на мостовима;**

Анализа оптерећења на мостовима

- Најважнији корак при прорачуну сваке конструкције је анализа оптерећења. У оквиру анализе оптерећења потребно је пажљиво сагледати сва оптерећења која могу деловати на конструкцију моста као и исправно проценити њихове интензитета.
- Одређивање интензитета и комбиновање оптерећења дефинисано је прописима и стандардима за мостове.
- Основна подела оптерећења на мостовима је у три групе:
 1. *Стално оптерећење*
 2. *Корисно оптерећење*
 3. *Инцидентно оптерећење*



Стално оптерећење на мостовима

- **Стално оптерећење** на мостовима обухвата:
 1. **Сопствену тежину елемената конструкције моста** што је дефинисано запреминском тежином материјала од кога су елементи направљени (АБ и ПНБ);
 2. **Додатно стално оптерећење** које обухвата тежину асфлатних застора (на друмским мостовима), шина, прагова и туцаничког застора (на железничким мостовима), хидроизолације, еластичних одбојника, пешачких ограда, расвете,...;
 3. Оптерећење од скупљања и течења бетона, **силе које настају од ПН**, притисак тла, притисак воде,...

EN 1991-1:2002: Запреминске тежине, сопствена тежина, корисна оптерећења за зграде

Запреминска тежина материјала	γ (kN/m ³)
-------------------------------	-------------------------------

Застор друмских мостова	
--------------------------------	--

Ливени асфалт и асфалт бетон	24-25
Мастик бетон	18-22
Вруће ваљани асфалт	23

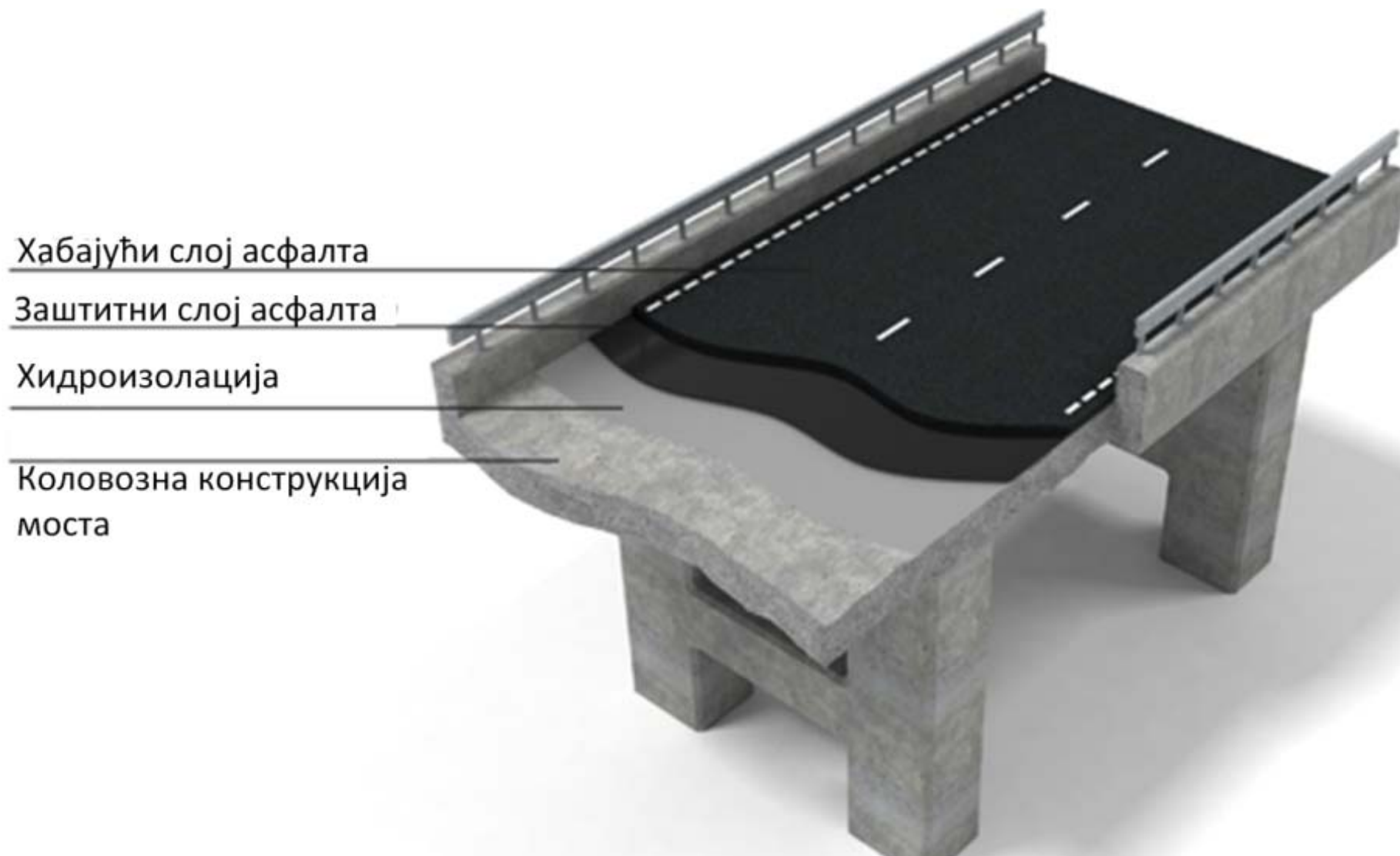
Застор железничких мостова	
-----------------------------------	--

Заштитни слој бетона	25
Нормални туцанички застор (гранит, гнајс)	20
Застор од базалта	26

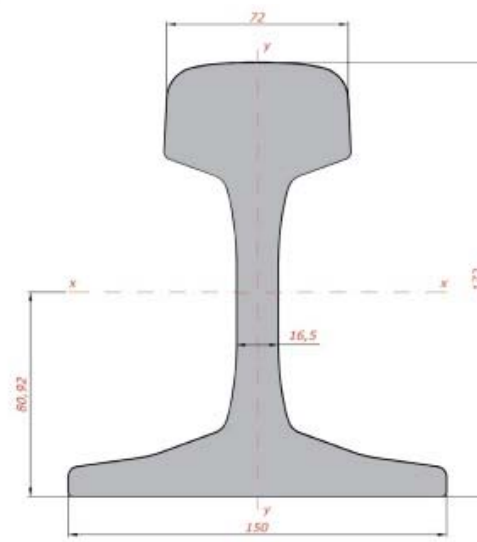
Оптерећење по јединичној дужини засторног корита	g_k (kN/m)
--	--------------

Две шине UIC60	1.2
ПН бетонски прагови и причврсни прибор	4.8
Дрвени прагови и причврсни прибор	1.9

Друмски мостови – слојеви



Железнички мостови – слојеви



Корисно оптерећење на мостовима

- Корисно оптерећење на мостовима обухвата:

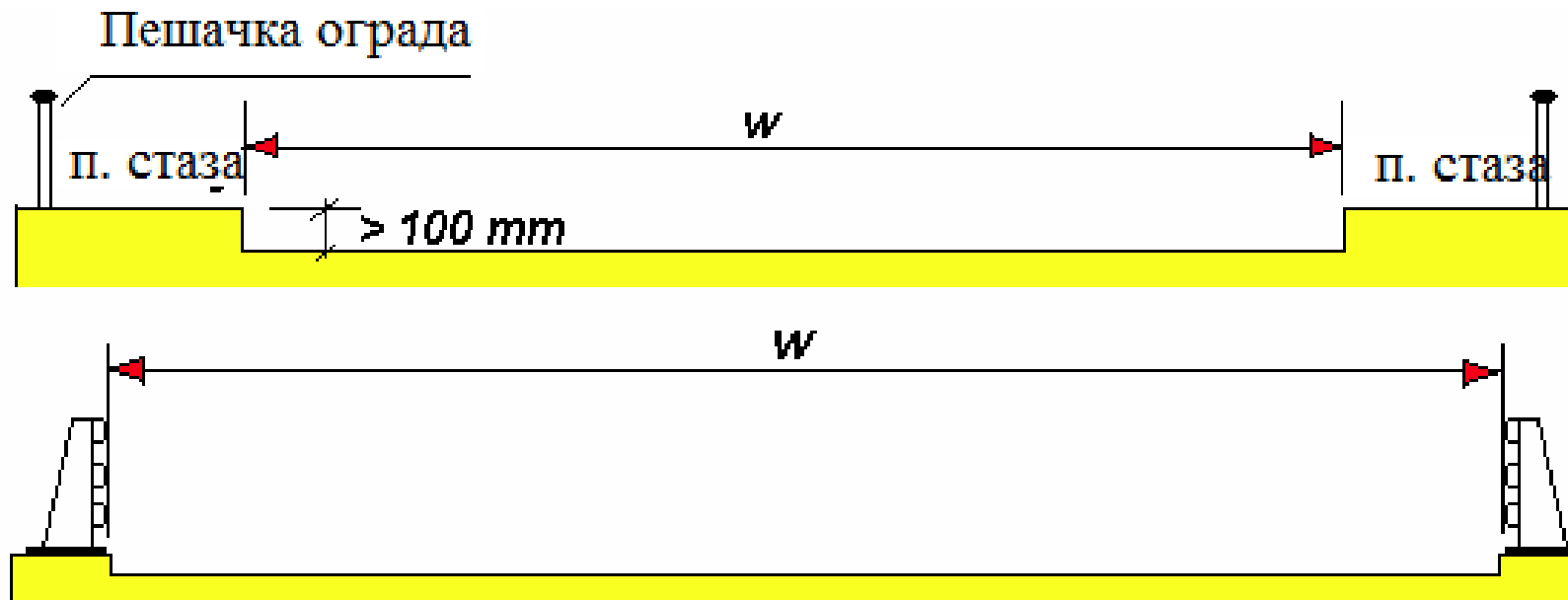
1. Саобраћајно оптерећење – вертикално оптерећење услед тежине возила и хоризонтално оптерећење услед покретања и кочења возила, промене брзине или смера кретања;
2. Температура;
3. Ветар;
4. Снег;
5. Лед;
6. Опрема приликом извођења моста,...

Инцидентно оптерећење на мостовима

- **Инцидентно оптерећење на мостовима обухвата:**
 1. **Оптерећење изазвано дејством земљотреса – сеизмичко оптерећење;**
 2. Удар возила и пловних објеката у елементе конструкције моста;
 3. Исклизнуће воза из шина,...

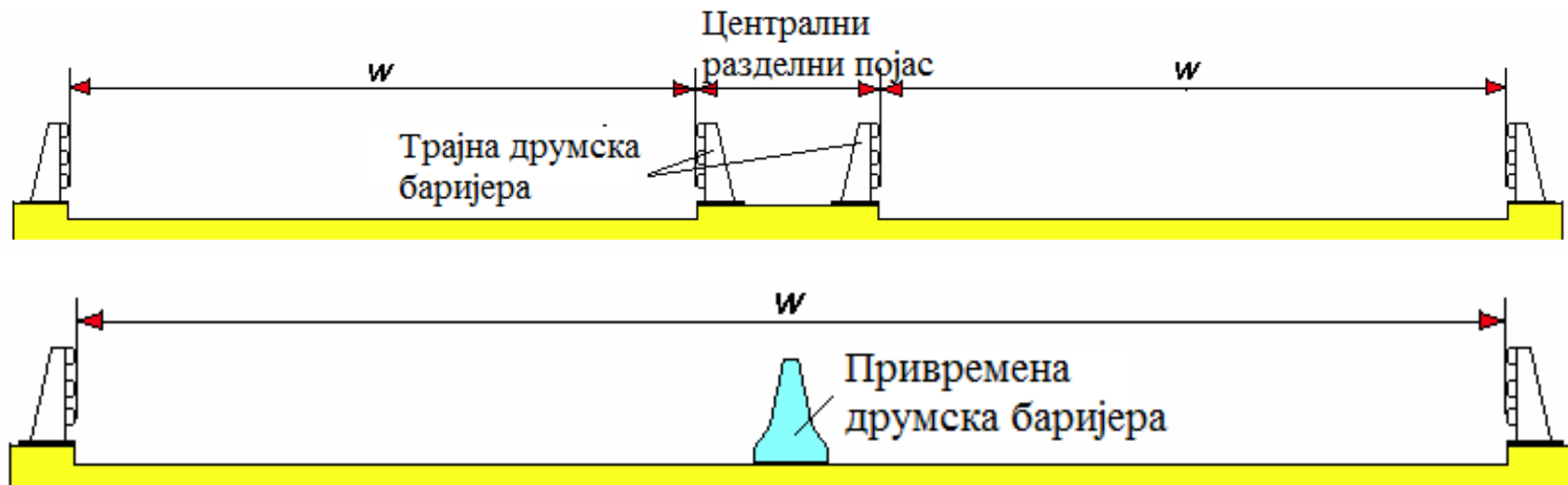
Саобраћајна оптерећења друмских мостова

- Коловоз се за потребе анализе саобраћајног оптерећења дели на **називне траке**;
- За сваку појединачну проверу граничног стања, број називних трака које се разматрају, као и њихов положај на коловозу и означавање се бира тако да се добију најнеповољнији утицаји;
- **Ширина коловоза w** је растојање између ивичњака или унутрашње ивице система за задржавање возила (безбедносне ограда).



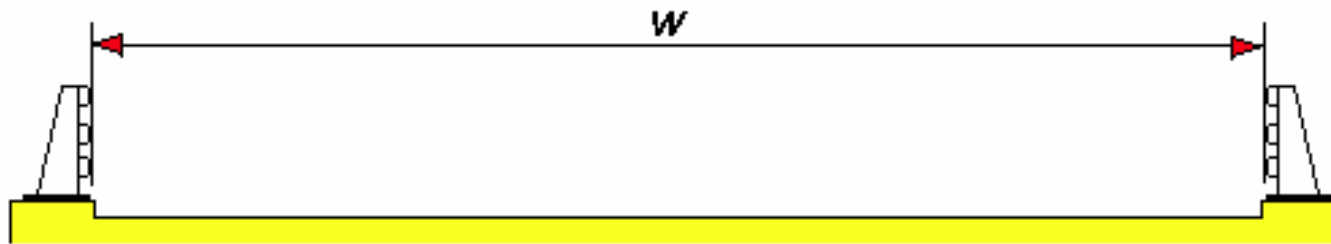
Саобраћајна оптерећења друмских мостова

- Ако постоји централни разделни део он се не узима у ширину коловоза, као ни ширина фиксних безбедносних ограда или ивичњака;
- Када је коловоз трајном централном баријером физички подељен на два дела, онда се сваки део коловоза посебно дели на називне траке;
- У случају привремене баријере разматра се читава ширина коловоза.



Саобраћајна оптерећења друмских мостова

- Коловоз се за потребе анализе саобраћајног оптерећења дели на **називне траке** ширине w_i ;
- Број саобраћајних трака n_i је цео број (површине 1, 2 и 3 на слици испод). Преостала површина је део коловоза који не припада називним тракама (површина 4).



w – ширина коловоза

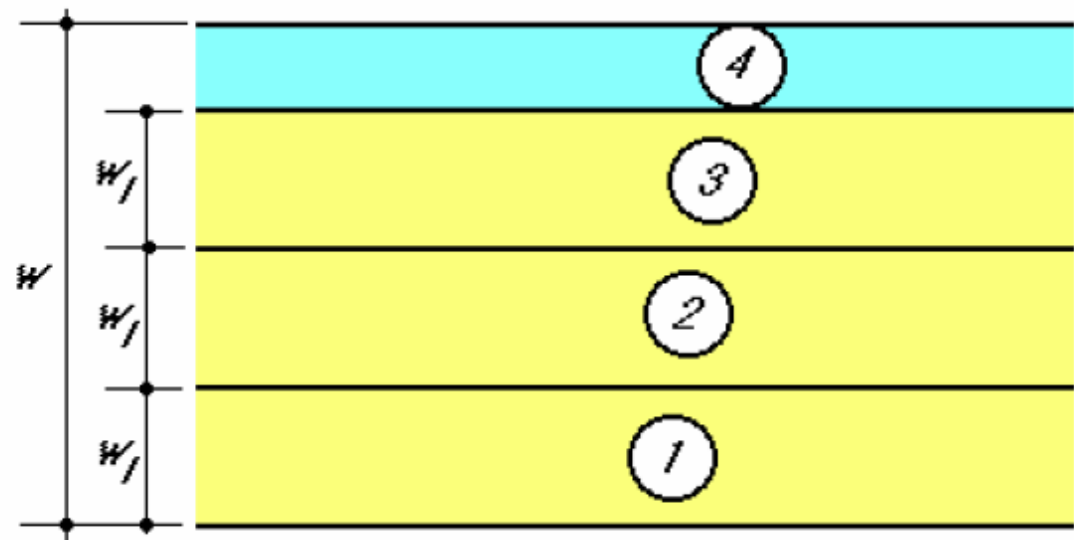
w_i – ширина називне траке

1 - Називна трака 1

2 - Називна трака 2

3 - Називна трака 3

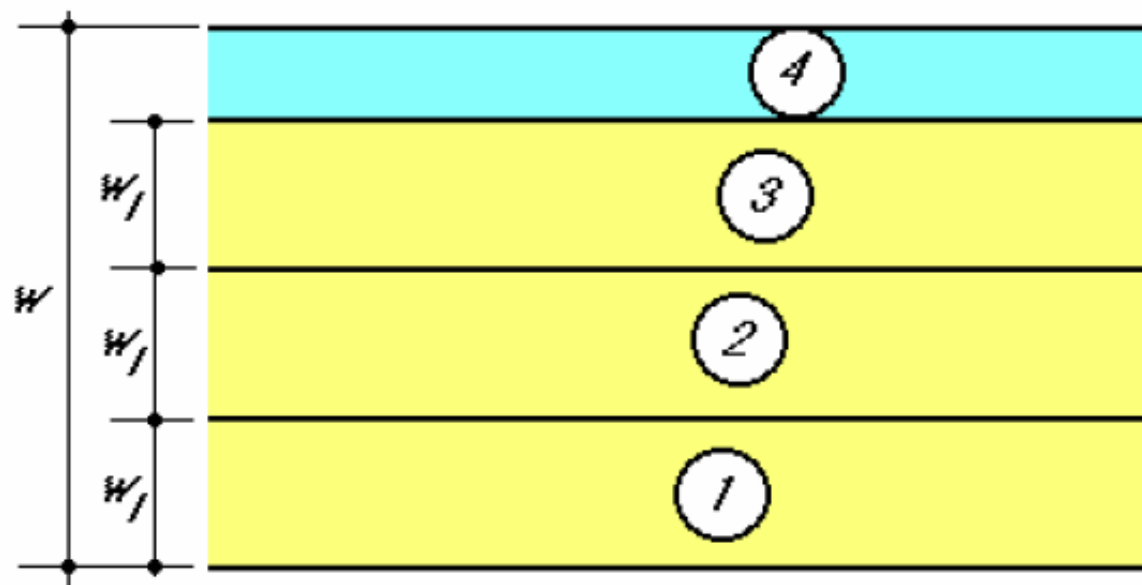
4 - Преостали део коловоза



Саобраћајна оптерећења друмских мостова

- Број називних трака и њихова ширина дефинисани су у табели испод.

Ширина коловоза - w	Број називних трака n_l	Ширина називних трака w_l	Ширина преостале површине
$w < 5.4 \text{ m}$	1	3.0 m	$w - 3.0 \text{ m}$
$5.4 \text{ m} \leq w < 6.0 \text{ m}$	2	$w/2$	0
$w \geq 6.0 \text{ m}$	$\text{Int}(w/3)$	3.0 m	$w - n_l \cdot 3.0 \text{ m}$



Саобраћајна оптерећења друмских мостова

- У стандарду **Еврокод** се за одређивање карактеристичних вредности користе се четири модела оптерећења за вертикална и хоризонтална саобраћајна оптерећења на друмским мостовима :

1. Модел оптерећења 1 - **LM1** – уобичајен друмски саобраћај на европским путевима (за глобалну анализу)
 2. Модел оптерећења 2 – **LM2** – једноосовинско тешко оптерећење за локалну анализу
 3. Модел оптерећења 3 – **LM3** – специјалних возила
 4. Модел оптерећења 4 – **LM4** – пешачка навала.
- У Еврокоду постоји 5 група оптерећења и 5 модела за прорачун замора.

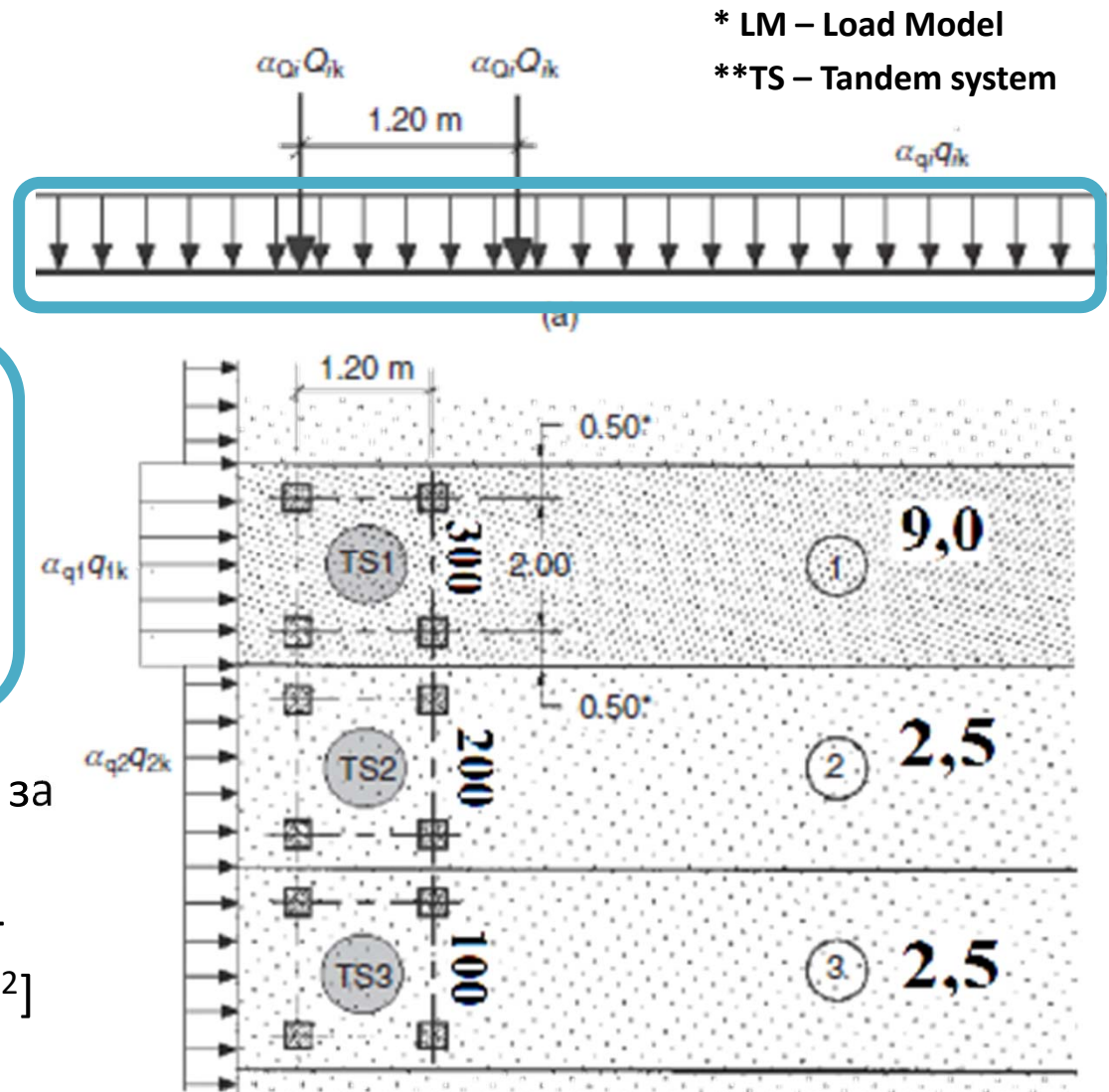
Модел оптерећења 1 – LM1

Моделе оптерећења LM1 се састоји од:

1. Једнакоподељеног површинског оптерећења (UDL):

$$\alpha_{qi} \cdot q_{ki}$$

- α_{qi} - коефицијент подешавања за i -ту називну траку;
- q_{ki} - карактеристична вредност осовинског оптерећења [kN/m²] за i -ту називну траку.



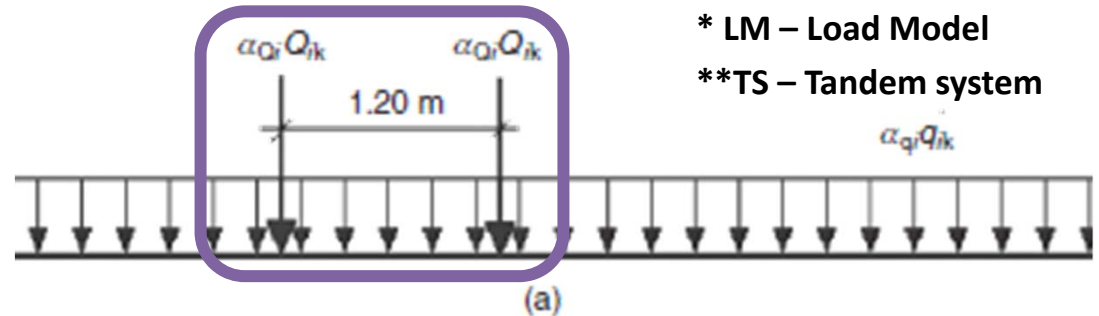
Модел оптерећења 1 – LM1

Моделе оптерећења LM1 се састоји од:

2. Двоосовинског тандем система (TS) концентрисаних сила:

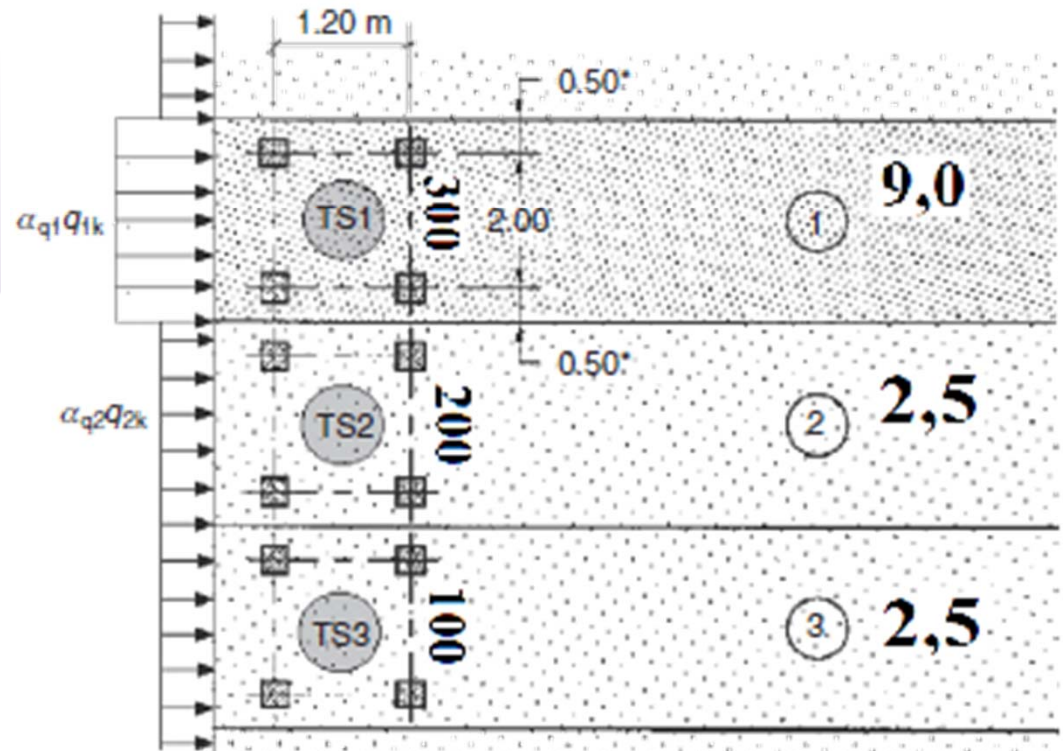
$$\alpha_{Qi} \cdot Q_{ik}$$

- α_{Qi} - коефицијент подешавања за i -ту називну траку;
- Q_{ki} - карактеристична вредност осовинског оптерећења [kN] за i -ту називну траку.



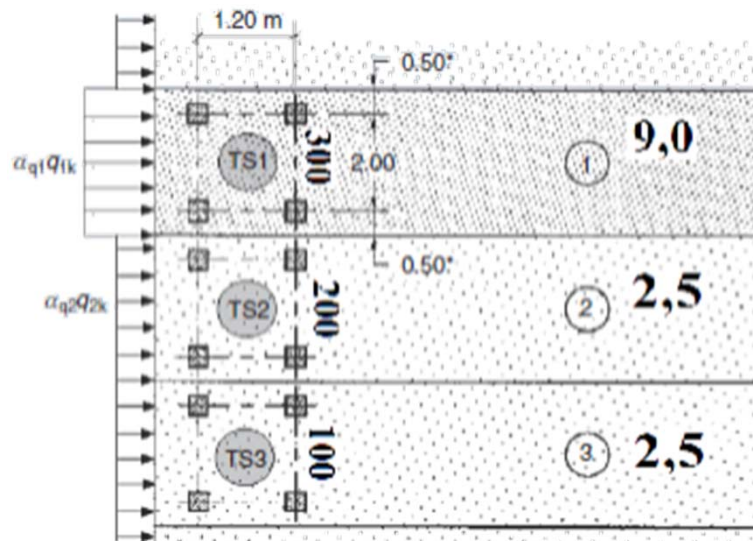
* LM – Load Model

**TS – Tandem system



Модел оптерећења 1 – LM1

Интезитети оптерећења по тракама



Део коловоза	UDL q_{ki} [kN/m ²]	TS Q_{ki} [kN]
Трака 1	9	300
Трака 2	2.5	200
Трака 3	2.5	100
Преостала површина	2.5	0

Овим вредностима обухваћени су и динамички коефицијенти увећања.

Модел оптерећења 1 – LM1

Коефицијенти подешавања за i-ту називну траку

TS	UDL
$\alpha_{Qi} \cdot Q_{ik}$	$\alpha_{qi} \cdot q_{ki}$

За мостове на аутопутевима (саобраћајницама Ia категорије)

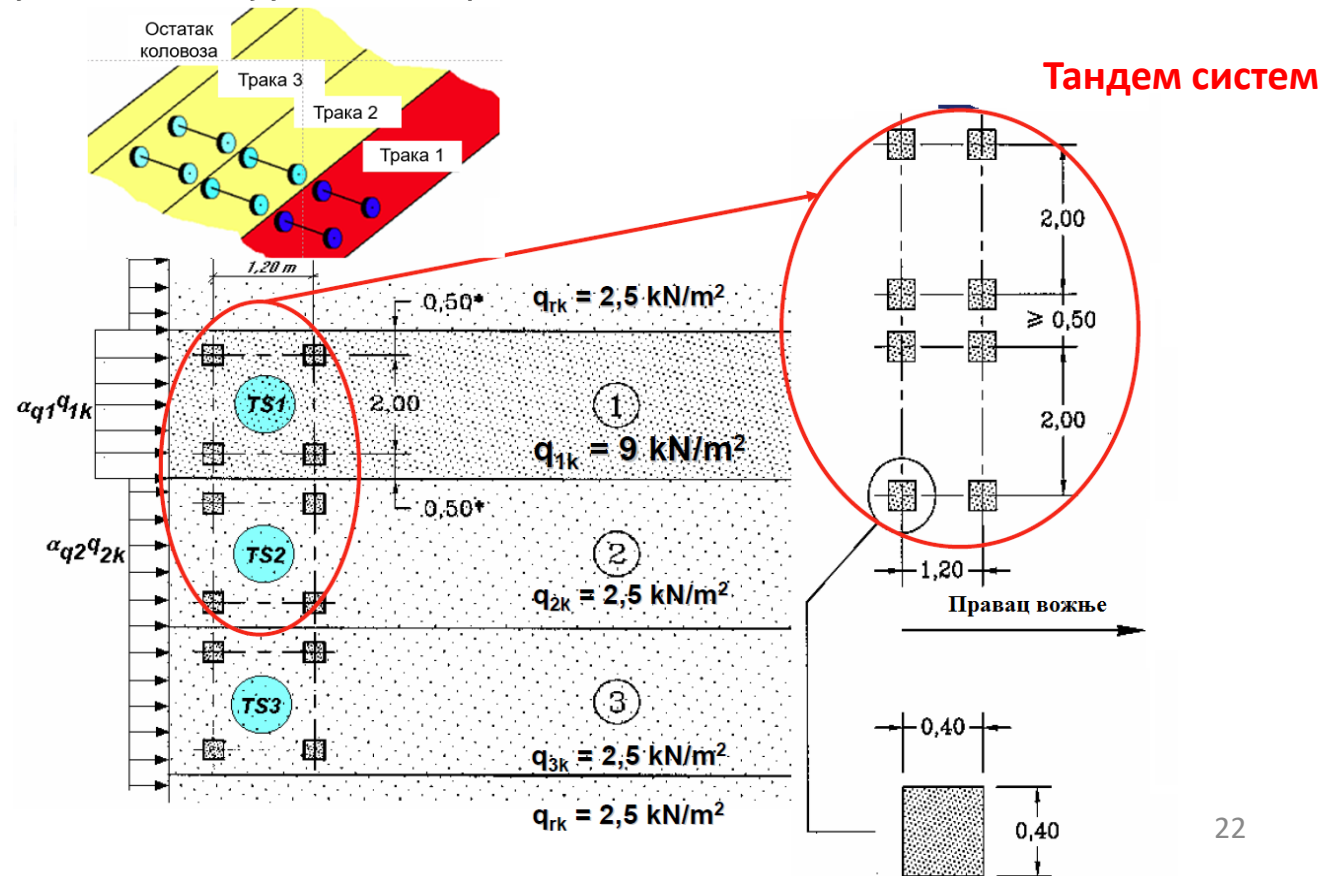
– трака 1:	$\alpha_{Q1} = 1,00$	$\alpha_{q1} = 1,00$
– трака 2:	$\alpha_{Q2} = 1,00$	$\alpha_{q2} = 1,00$
– трака 3:	$\alpha_{Q3} = 1,00$	$\alpha_{q3} = 1,00$
– остале површине:		$\alpha_{qk} = 1,00$

За мостове на осталим државним путевима (саобраћајнице Ib, IIa и IIb категорије)

– трака 1:	$\alpha_{Q1} = 0,80$	$\alpha_{q1} = 0,80$
– трака 2:	$\alpha_{Q2} = 0,80$	$\alpha_{q2} = 1,00$
– трака 3:	$\alpha_{Q3} = 0,80$	$\alpha_{q3} = 1,00$
– остале површине:		$\alpha_{qk} = 1,00$

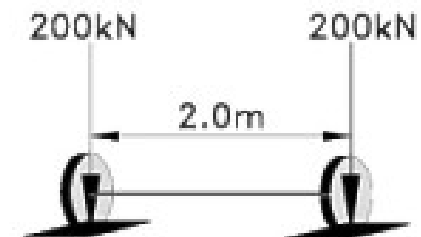
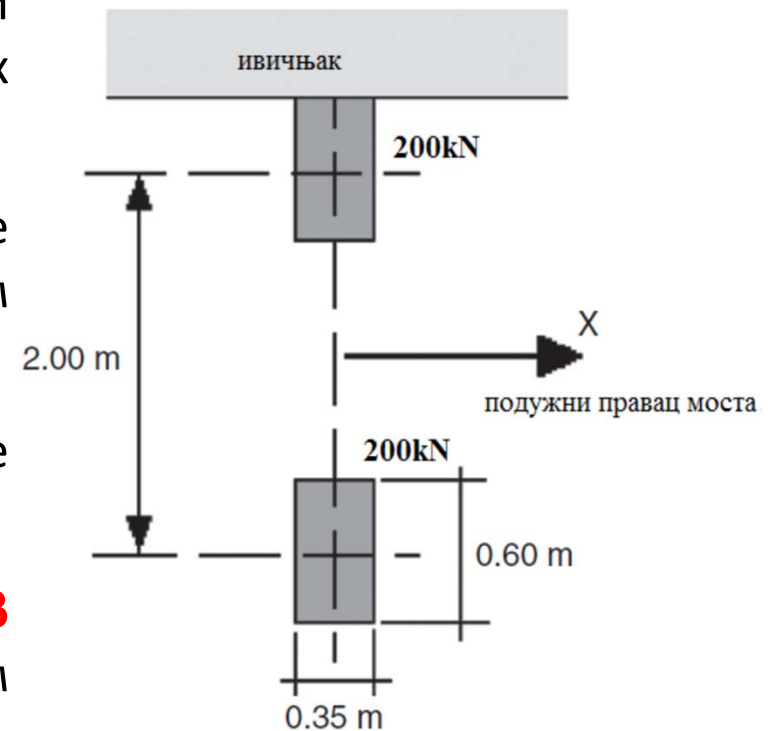
Модел оптерећења 1 – LM1

- Један тандем систем у једној називној траци.
 - Тандем сила не може да се раздваја.
 - Оптерећење по једном точку је једнако половини осовинског оптерећења.
 - У случају одређивања локалних утицаја тандем системи из суседних називних трака могу да се међусобно приближе, али не више од **0.5 m** осовински.
- 



Модел оптерећења 2 – LM2

- **Модел оптерећења LM2** састоји се од једноосовинског оптерећења које се користи за контроле локалних напрезања кратких елемената (од 3 до 7 m);
- Моделира се као две концентрисане силе интензитета **200 kN** које делују на осовинском растојању од **2.00 m**;
- Контактна површина точка може да буде непосредно уз ивичњак;
- Оптерећење се умножава коефицијентом **β** који износи **1.00** према Националном прилогу;
- Као упрошћење могу да се користе димензије контактне површине точка као код LM1 (**0.40x0.40 m**).



Модели оптерећења 3,4 – LM3,4

Моделе оптерећења LM3:

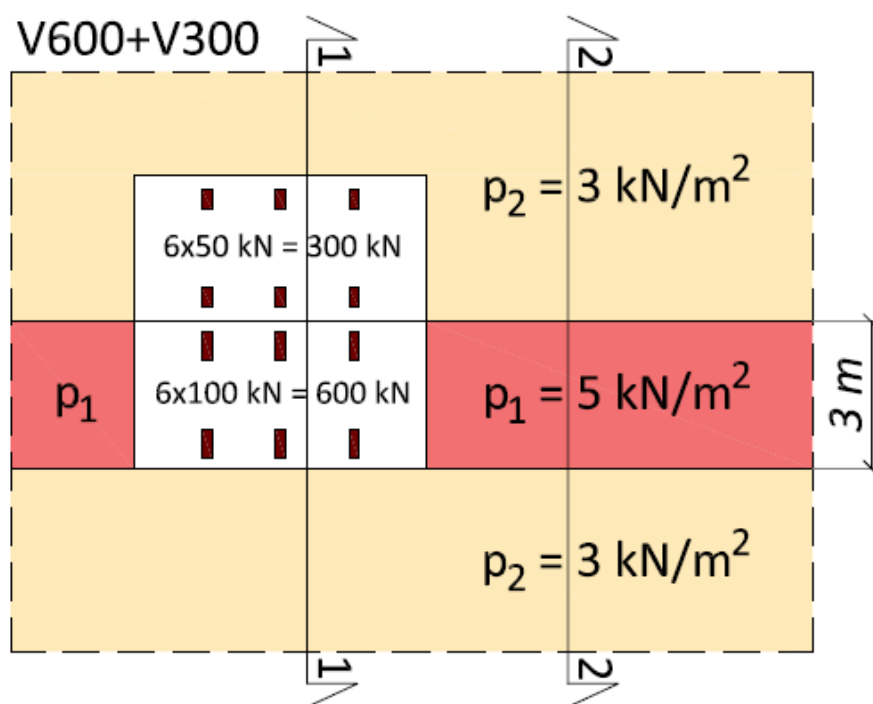
- Репрезентује специјална возила која се могу кретати само преко мостова на посебним рутама, који су предвиђени за изузетна оптерећења.
- Користи се само у случајевима када се то посебно захтева.

Модел оптерећења LM4

- Овим моделом оптерећења обухваћен је утицај људске навале на коловозу.
- Изузетно оптерећење у случају градских мостова где постоји објективан ризик од појаве људске навале.
- Једнакоподељено оптерећење интензитета 5.0 kN/m^2 које делује на најнеповољнијим деловима утицајне површине.

Поређење саобраћајног оптерећења на друмским мостовима у основи према ЈУС-у и Еврокод-у

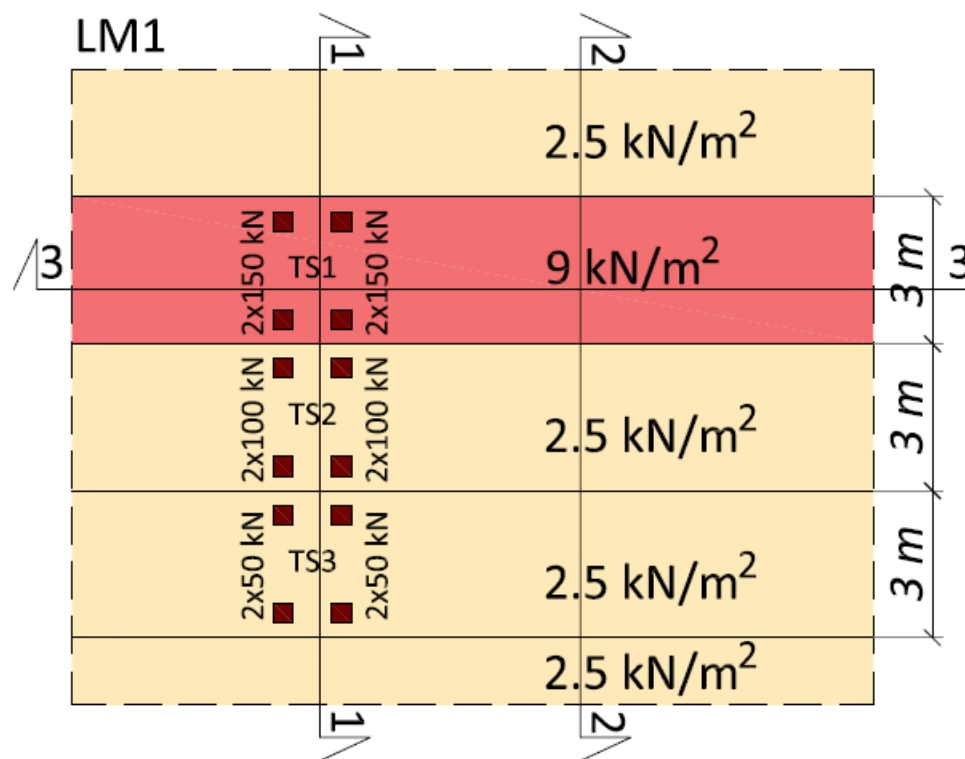
Домаћи правилник ЈУС (V600+V300)



$$K_d = 1.4 - 0.008 \times L$$

На пешачким стазама 3.00 kN/m^2

Еврокод 1 (LM1)



Динамички коефицијент урачунат
На пешачким стазама 3.00 kN/m^2

Саобраћајно оптерећење на железничким МОСТОВИМА

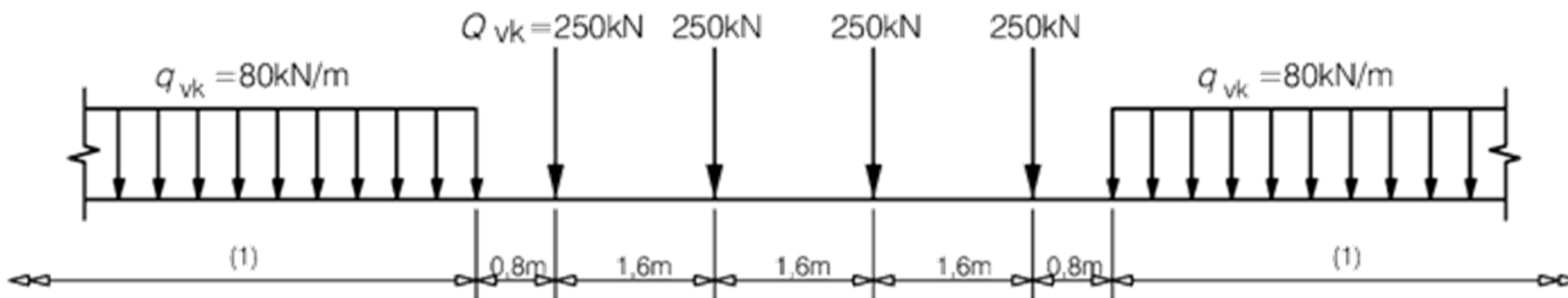
- Модел оптерећења железничког саобраћаја на европским ширококолосечним пругама за одређивање статичких утицаја вертикалног оптерећења услед уобичајеног саобраћаја: **(исто дефинисано и у домаћим прописима и у Еврокоду)**

По домаћим прописима:

UIC71

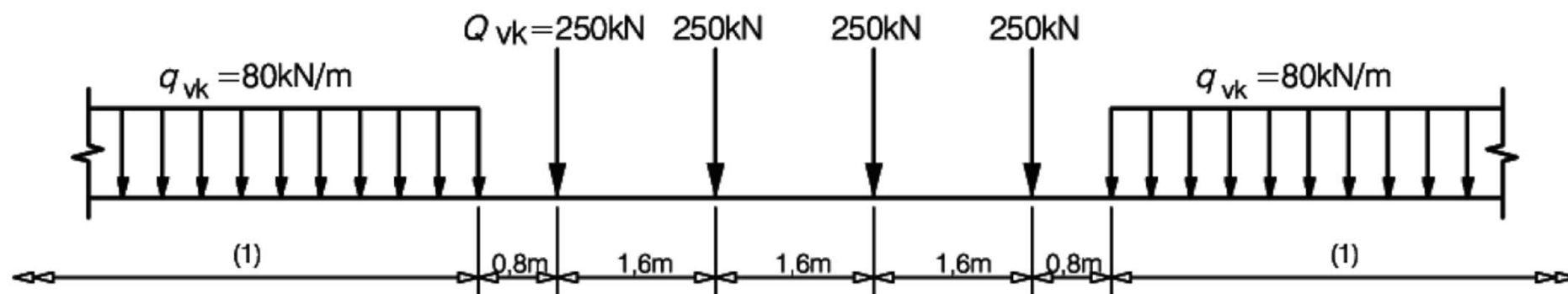
По Еврокоду:

LM71



Саобраћајно оптерећење на железничким МОСТОВИМА

LM71



Оптерећење се множи са два коефицијента:

Коефицијент категорије пруге: $\alpha = 0.75-0.83-0.91-1.00-1.10-1.21-1.33$

- магистрална пруга: $\alpha = 1.21$

- регионалне и остале пруге: α прописује надлежна институција за сваки пројекат, уз услов да је $\alpha \geq 1.00$.

Динамички коефицијент:

Пажљиво одржаван колосек Φ_2 :

$$\Phi_2 = \frac{1.44}{\sqrt{L_{\Phi}} - 0.2} + 0.82 \quad 1.00 \leq \Phi_2 \leq 1.67$$

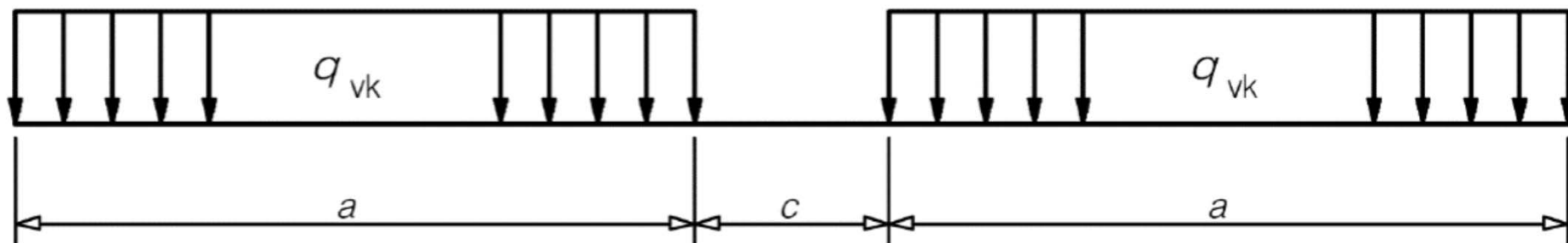
Стандардно одржаван колосек Φ_3 :

$$\Phi_3 = \frac{2.16}{\sqrt{L_{\Phi}} - 0.2} + 0.73 \quad 1.00 \leq \Phi_3 \leq 2.0$$

Модел оптерећења специјалног железничког саобраћаја

Модел оптерећења **специјалног железничког саобраћаја** на европским ширококолосечним пругама:

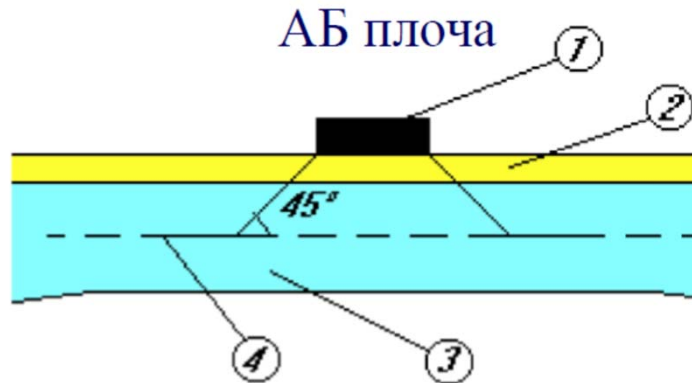
1. Домаћи правилник: **SW/-2, SW/0, SW/1 и SW/2**;
2. Еврокод: стандардни саобраћај SW/0, тежак саобраћај SW/2, путнички возови великих брзина HSLM, неоптерећен воз (једнакоподељено оптерећење за контролу стабилности на претурање).



Модел оптерећења	q_{vk} [kN/m]	a [m]	c [m]
SW/0	133	15,0	5,3
SW/2	150	25,0	7,0

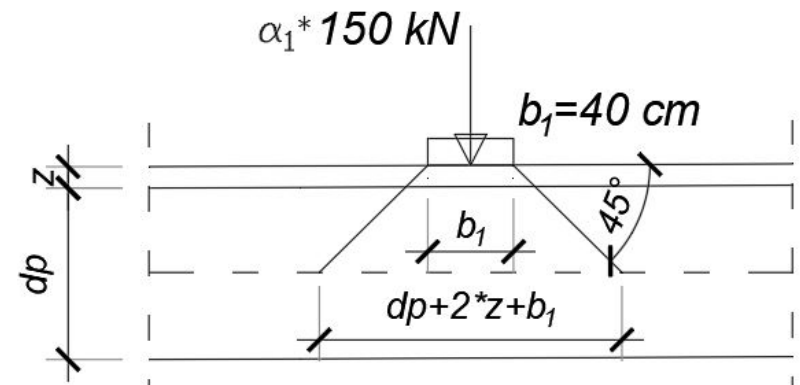
Распростирање оптерећења од притиска точка на коловозну плочу

Друмски мост са АБ коловозном плочом:

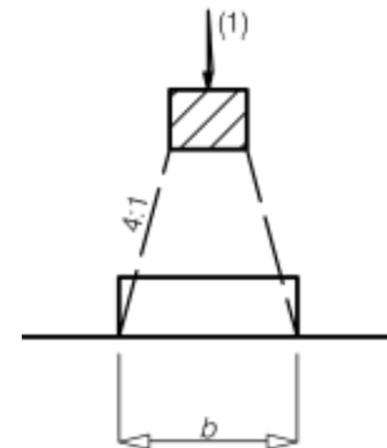
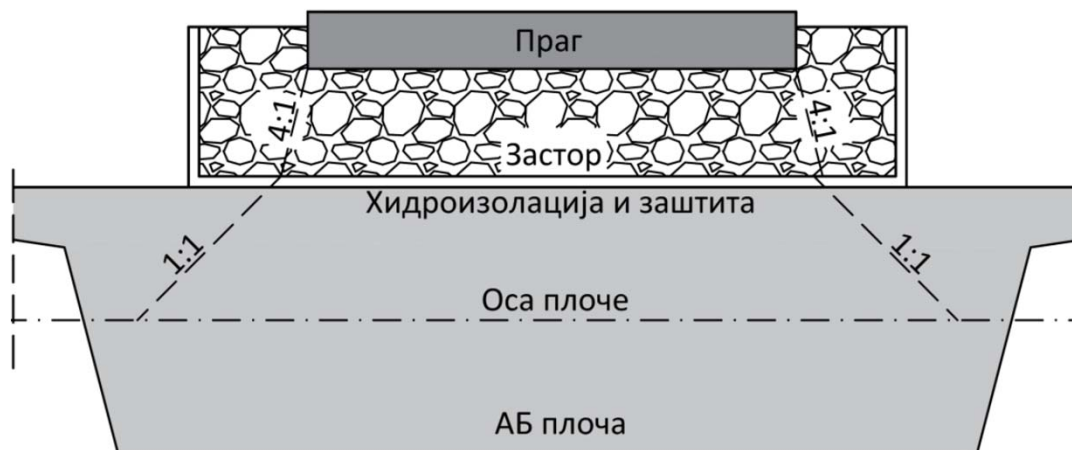


Трака 1 - TS1

У правцу управном на
правац вожње

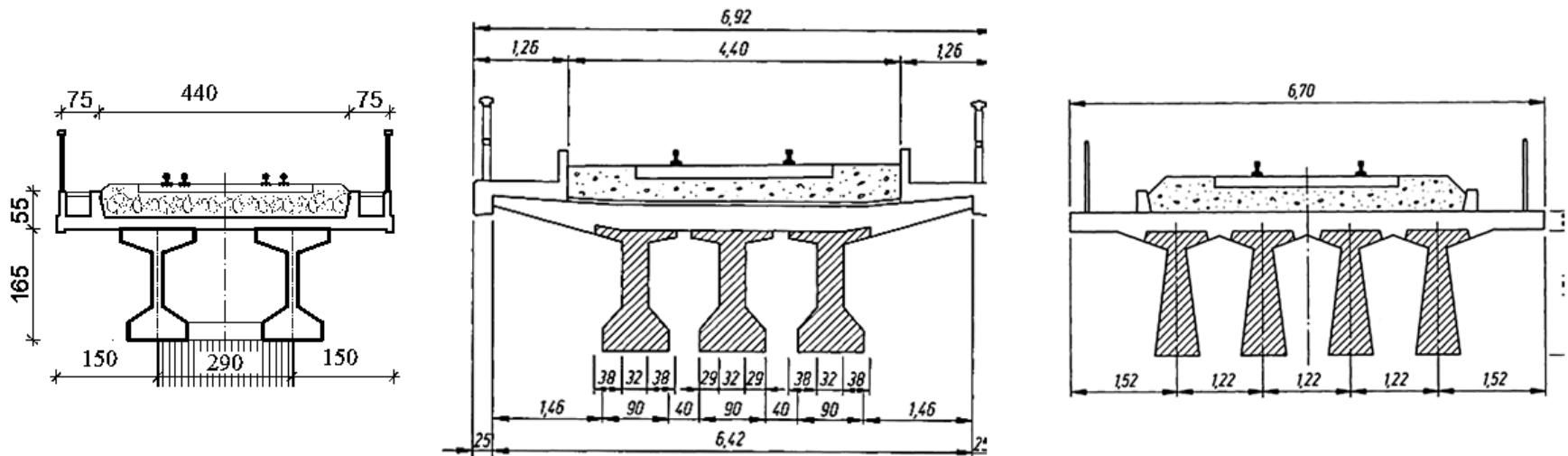


Железнички мост са АБ коловозном плочом:



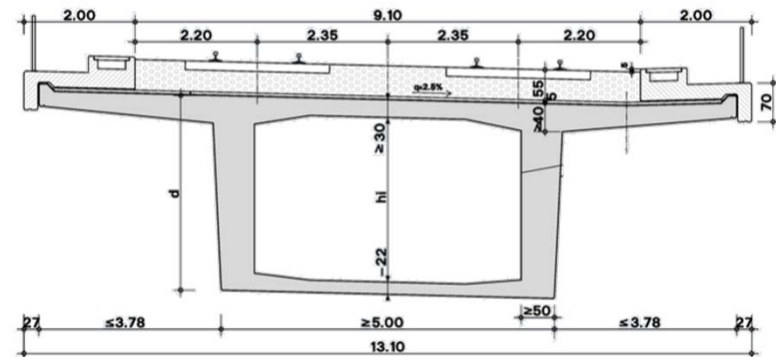
Попречна прерасподела саобраћајног оптерећења код железничких мостова

- Саобраћајно оптерећење код железничких мостова се не може „шетати“ у попречном правцу моста;
- Оптерећење у виду кретања воза делује по колосеку чији је положај тачно дефинисан на попречном пресеку моста;
- За случај моста са једноколосечном железницом сви главни носачи прихватају исти ниво оптерећења (оптерећење је симетрично у односу на попречни пресек);



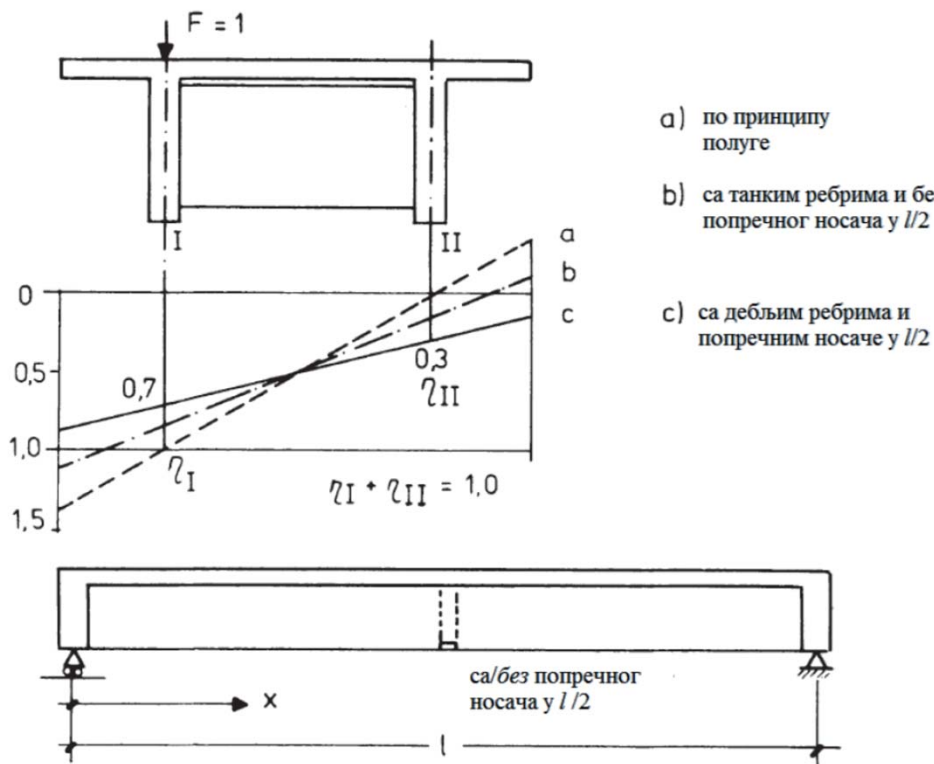
Попречна прерасподела саобраћајног оптерећења код железничких мостова

- Саобраћајно оптерећење код железничких мостова се не може „шетати“ у попречном правцу моста;
- Оптерећење у виду кретања воза делује по колосеку чији је положај тачно дефинисан на попречном пресеку моста;
- За случај моста са једноколосечном железницом сви главни носачи прихватају исти ниво оптерећења (оптерећење је симетрично у односу на попречни пресек);
- За случај моста са вишеколосечном железницом потребно је за разматрани носач вредност оптерећења одредити уз помоћ утицајне линије за разматрани носач (оптерећење није симетрично у односу на попречни пресек).

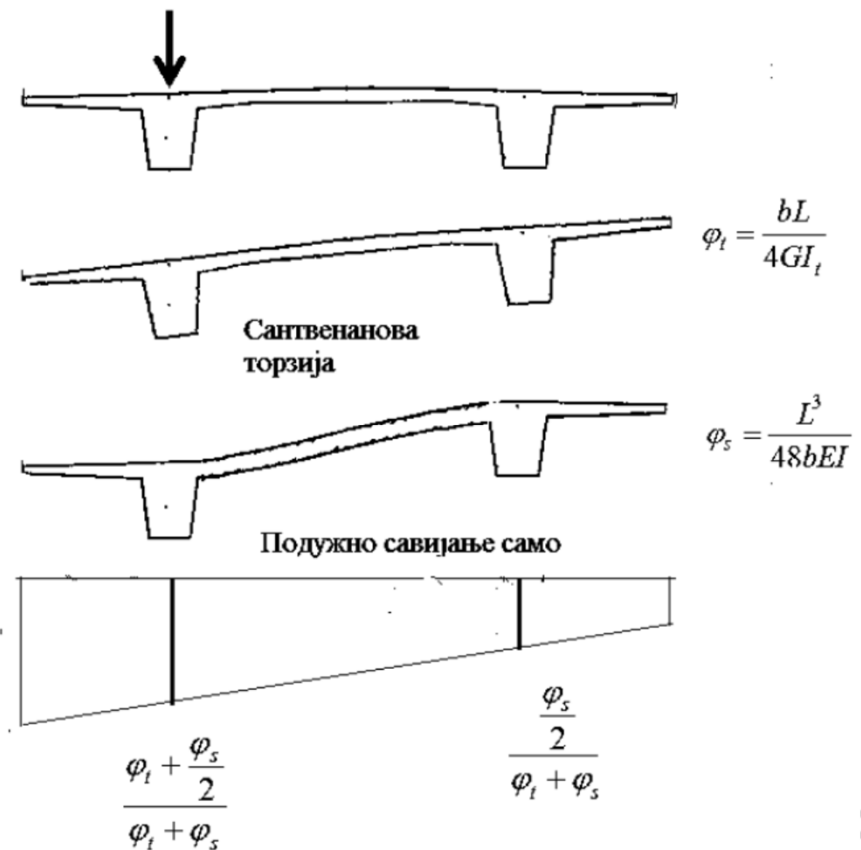


Попречна расподела саобраћајног оптерећења код друмских мостова са два главна носача

- За широке мостове са два главна носача користи се следећи принцип за попречну прерасподелу саобраћајног оптерећења:

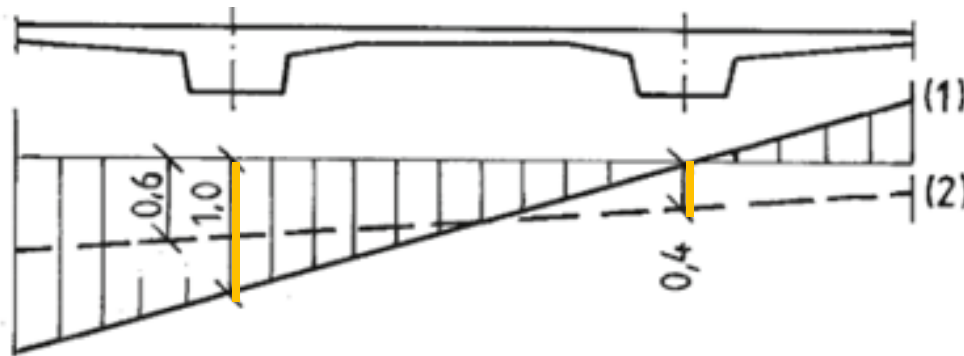


- a) по принципу полуле
- b) са танким ребрима и без попречног носача у $l/2$
- c) са дебелим ребрима и попречним носачем у $l/2$



Попречна расподела саобраћајног оптерећења код мостова са два главна носача

Одређују се ординате утицајне линије које зависе од ротације попречног пресека као последица **Сентвенанове торзије** и **подужног савијања пресека**



1) у зони ослонаца (попречних носача)

2) око средине распона

$$\kappa = \frac{\varphi_T}{\varphi_{w0} + \varphi_T}$$

$$\eta = \eta_s \pm 0,5 \cdot \kappa$$
$$\rightarrow \eta_1 = 0,5 + 0,5 \cdot \kappa$$
$$\eta_2 = 0,5 - 0,5 \cdot \kappa$$

Сентвенанова торзија

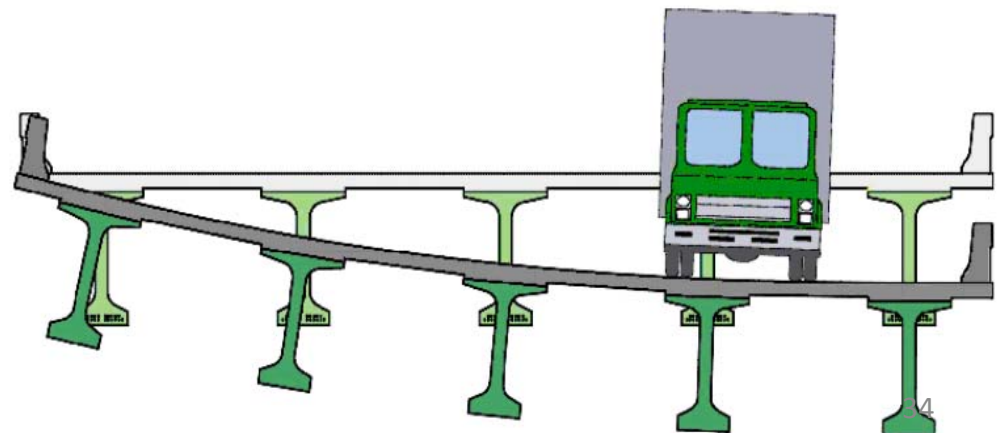
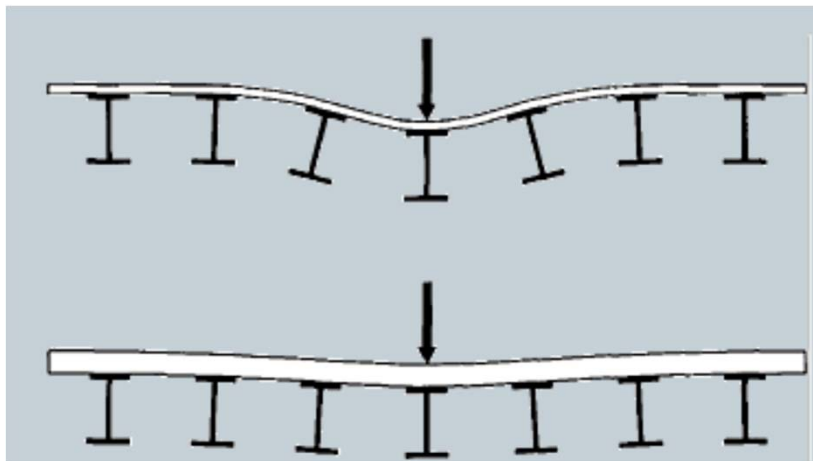
$$\varphi_T = \frac{0,5 \cdot M_T \cdot \frac{L}{2}}{G \cdot I_T} = \frac{M_T \cdot L}{4 \cdot 0,4 \cdot E \cdot I_T} = \frac{M_T \cdot L}{1,6 \cdot E \cdot I_T}$$

Подужно савијање пресека

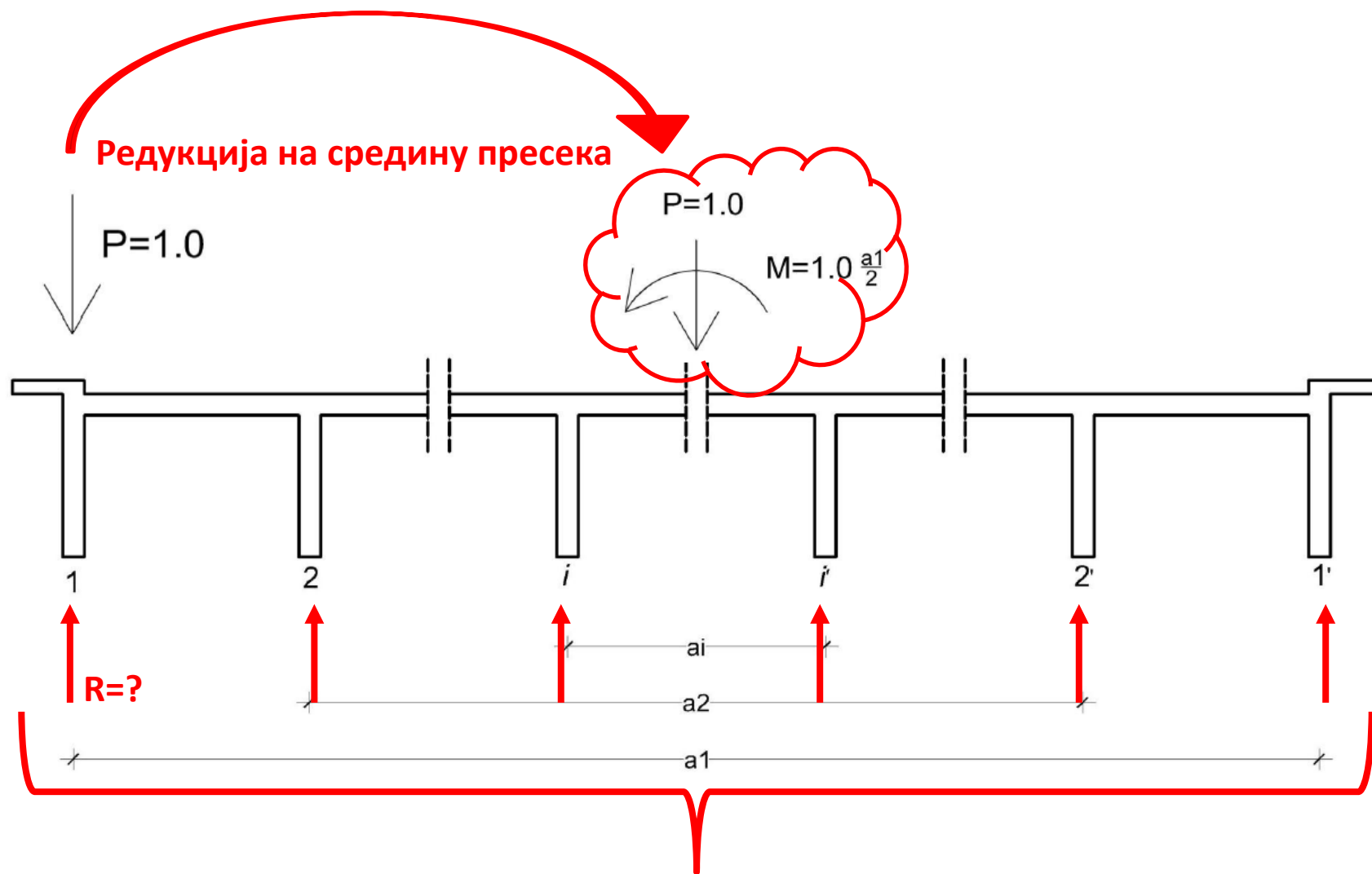
$$\varphi_{w0} = \frac{f}{0,5 \cdot b} \quad f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_y}$$

Попречна расподела саобраћајног оптерећења код мостова са више главних носача

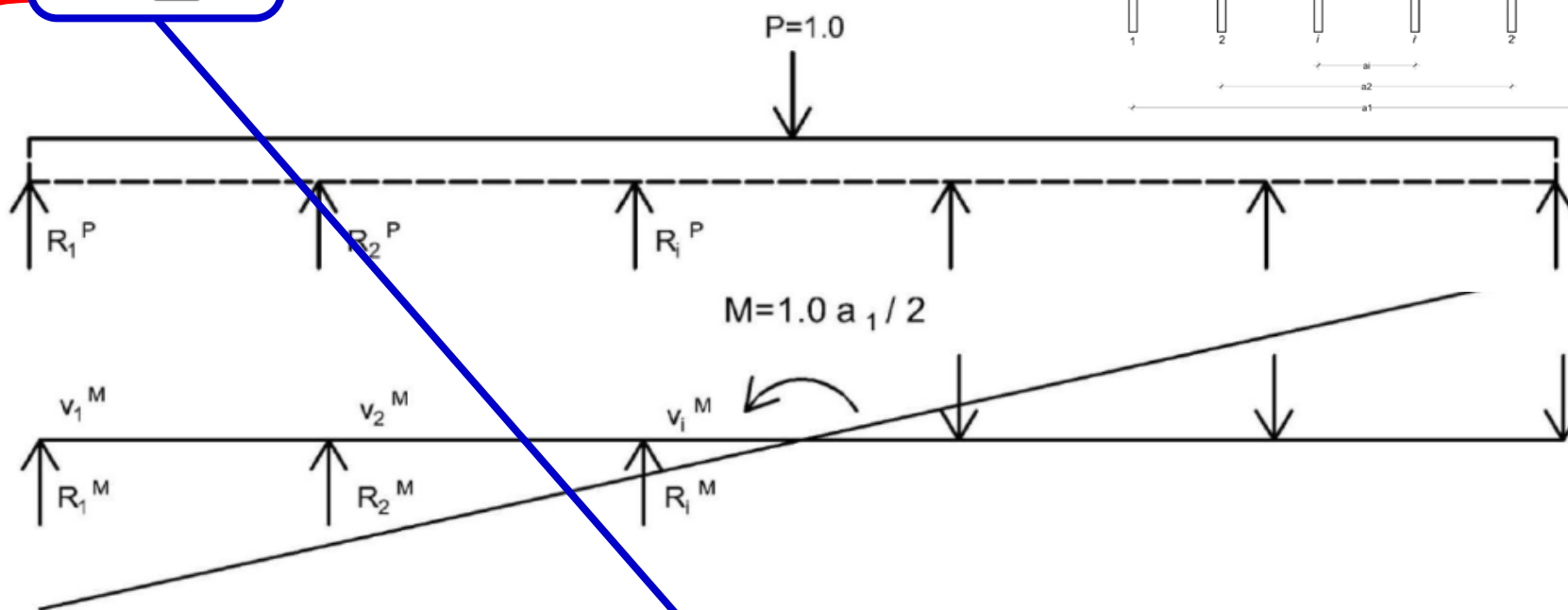
- За широке мостове са **више главних носача** за одређивање попречне прерасподеле користи се **метода Courbon-a** - метода ексцентричног притиска која даје задовољавајуће резултате
- **Уводе се претпоставке:**
 - **Попречни носачи / коловозна плоча „веома крути“**
 - Утицајне линије попречне прерасподеле су **праве линије** за чије дефинисање су нам потребне две ординате
 - Ординате утицајне линије зависе искључиво од положаја и момента инерције (крутости) носача **(ако су сви носачи исте крутости онда ординате зависе само од растојања!)**



Попречна расподела саобраћајног оптерећења код мостова са више главних носача



Вредности реакција представљају ординате
утицајне линије

$$R_i^P = \frac{I_i}{\sum I_i}$$


$$R_i^M = R_1^M \frac{a_i}{a_1} \frac{I_i}{I_1} \quad (1)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow$$

$$R_1^M \times a_1 + R_2^M \times a_2 + R_i^M \times a_i + \dots = \frac{a_1}{2} \quad (2)$$

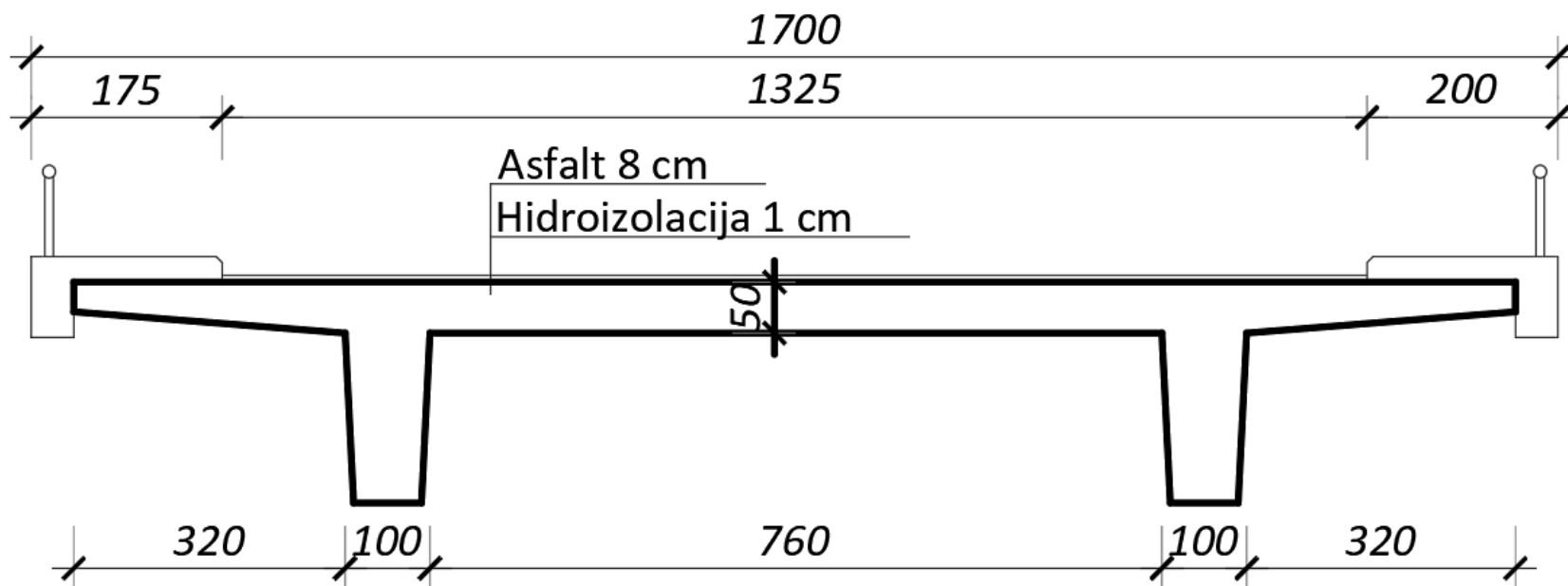
$$R_i^M = \frac{a_1 a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$

$$\eta_{i,k} = \frac{I_i}{\sum I_i} \pm \frac{a_k a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$

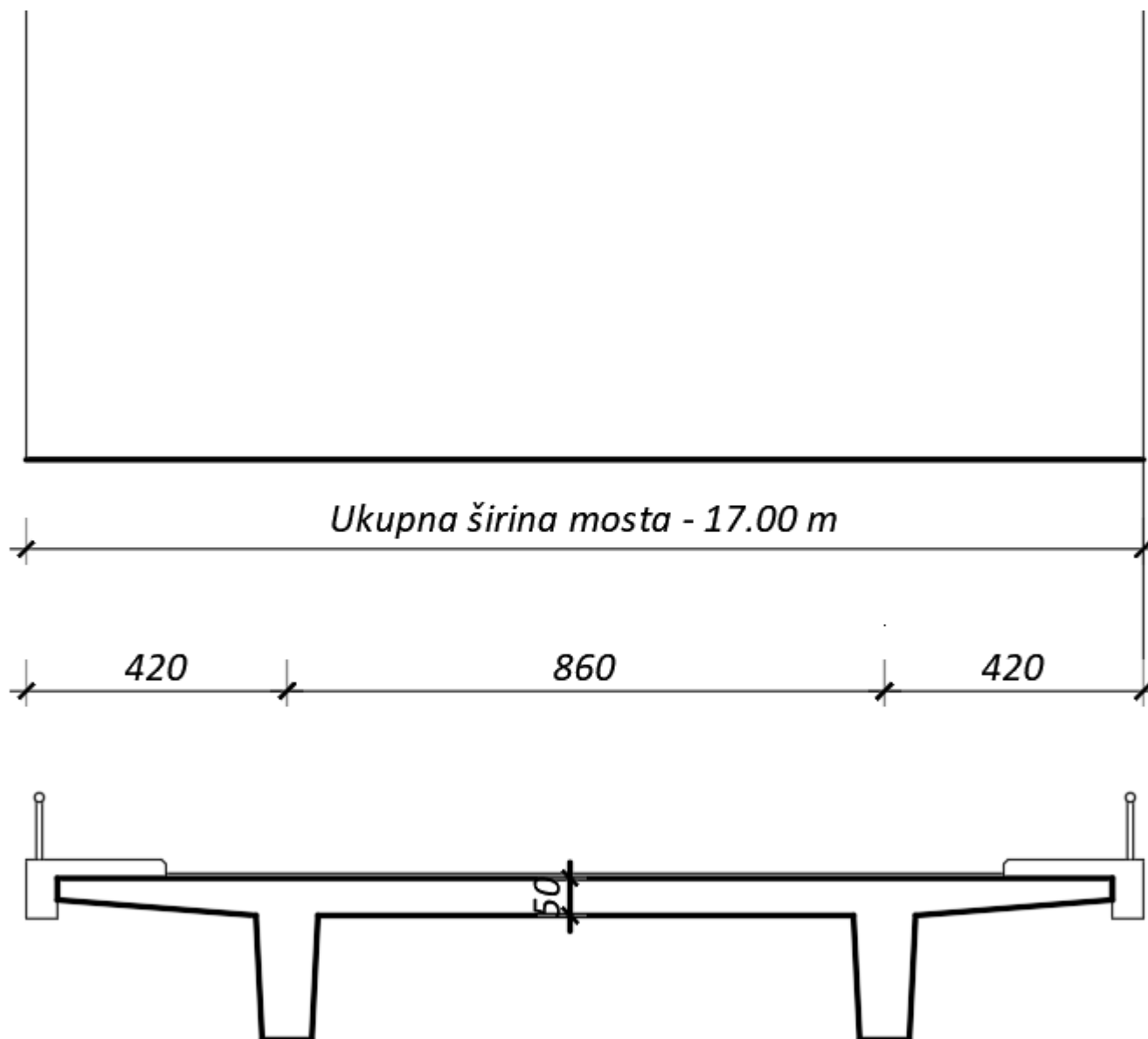
36

ПРИМЕР 1 – Широки друмски мост са два главна носача

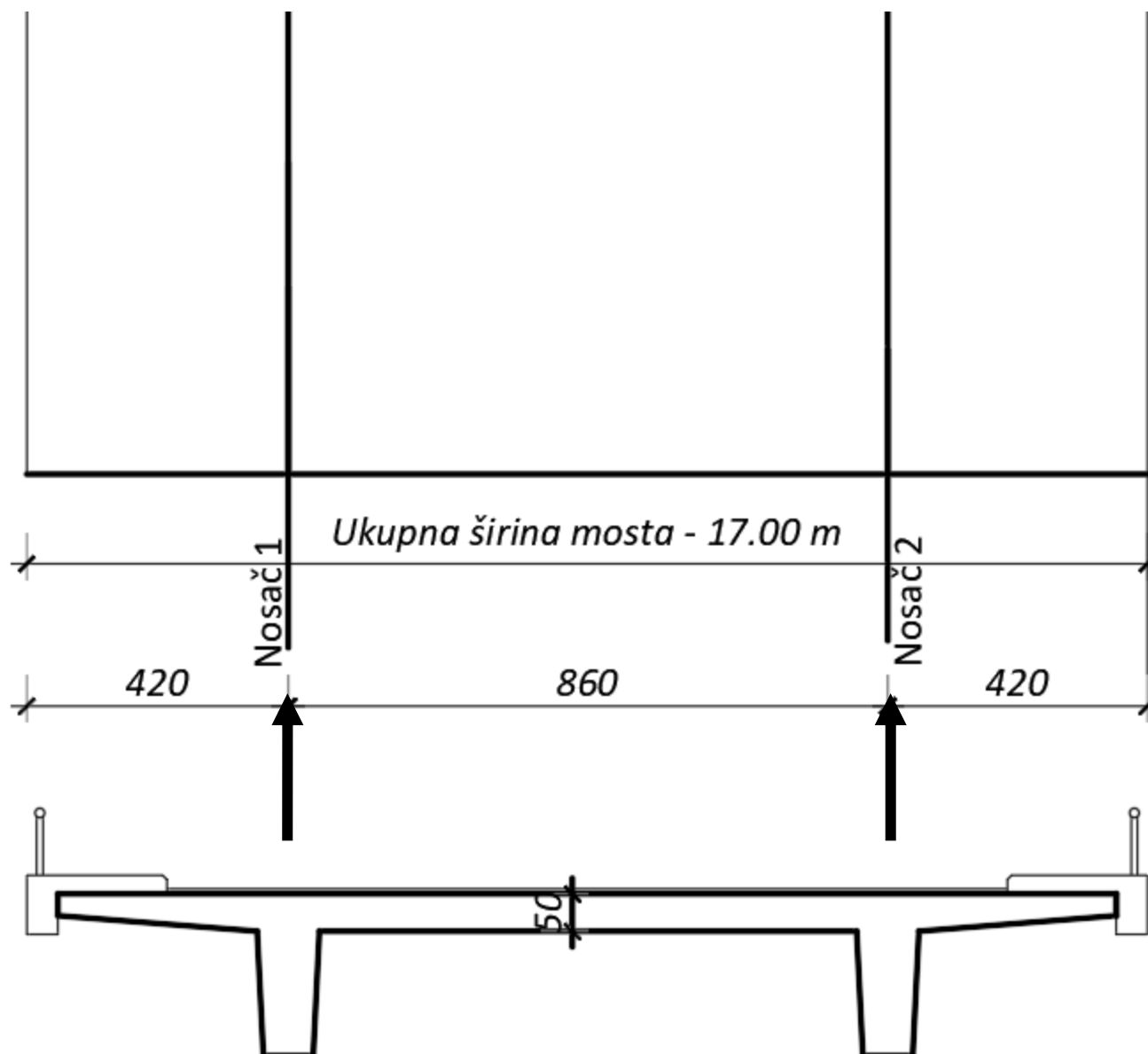
- Одредити линијску шему саобраћајног оптерећења за носач 1 (леви) на ребрастом друмском мосту
- Статички систем проста греда распона 15 m
- Мост је оптерећен сталним теретом и тежином бетонске ограде од 5.0 kN/m
- Усвојити шему саобраћајног оптерећења према стандарду Еврокод (EN 1991-2: Дејства на конструкције - Део 2: Саобраћајно оптерећење на мостовима).



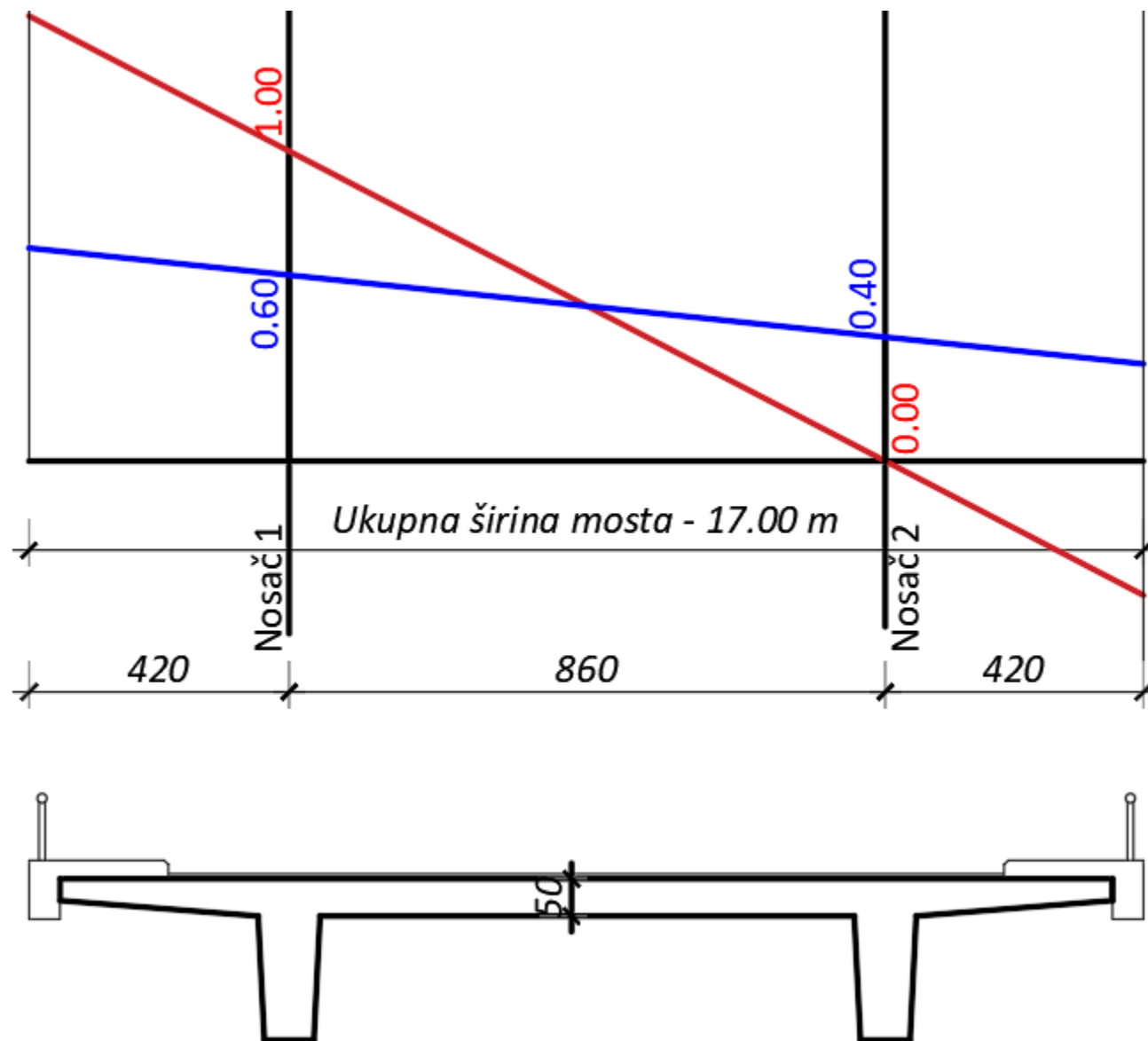
- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: усвојено 0.6-0.4 и 1.0-0.0



- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: 0.6-0.4 и 1.0-0.0.

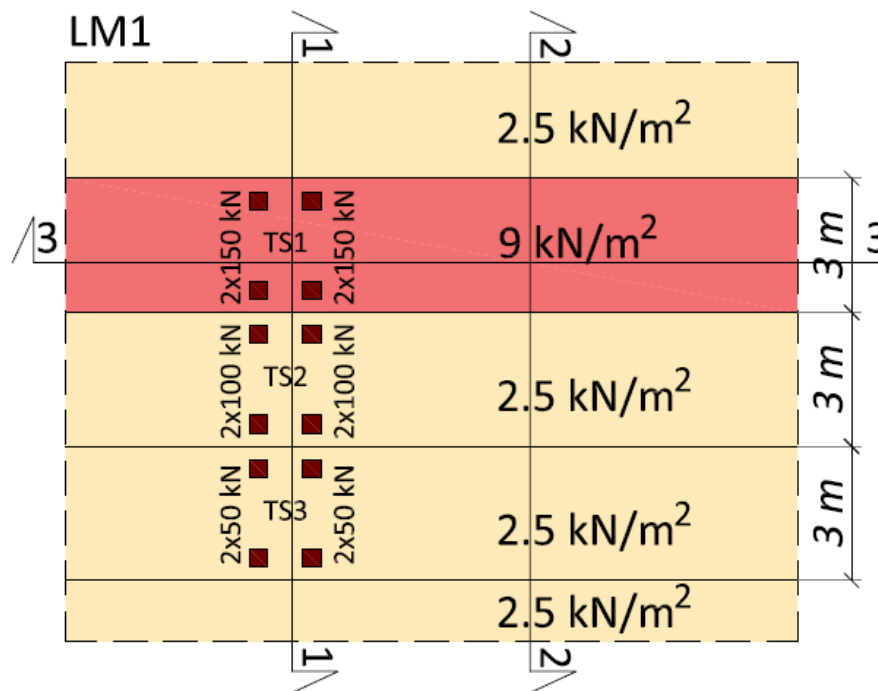


- Дефинишемо утицајну линију – линију прерасподеле: користимо 0.6-0.4 и 1.0-0.0

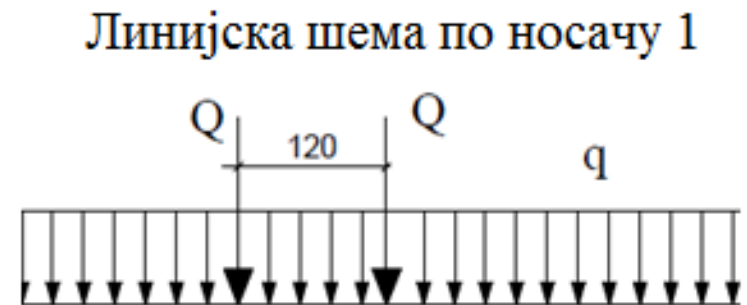


Линијска шема саобраћајног оптерећења се састоји од:

1. Две концентрисане силе **Q** на растојању од **1.20 m** (размак између осовина) које репрезентују тандем систем **TS LM1**
 2. Једнакоподељеног оптерећења **q** деловајући непрекинуто дуж читавог распона које репрезентује површинско оптерећење **UDL LM1**
- Добијена шема оптерећења се поставља у **подужном правцу**, дуж распона у **меродаван положај**, у зависности од врсте утицаја који се одређује (утицајне линије!)

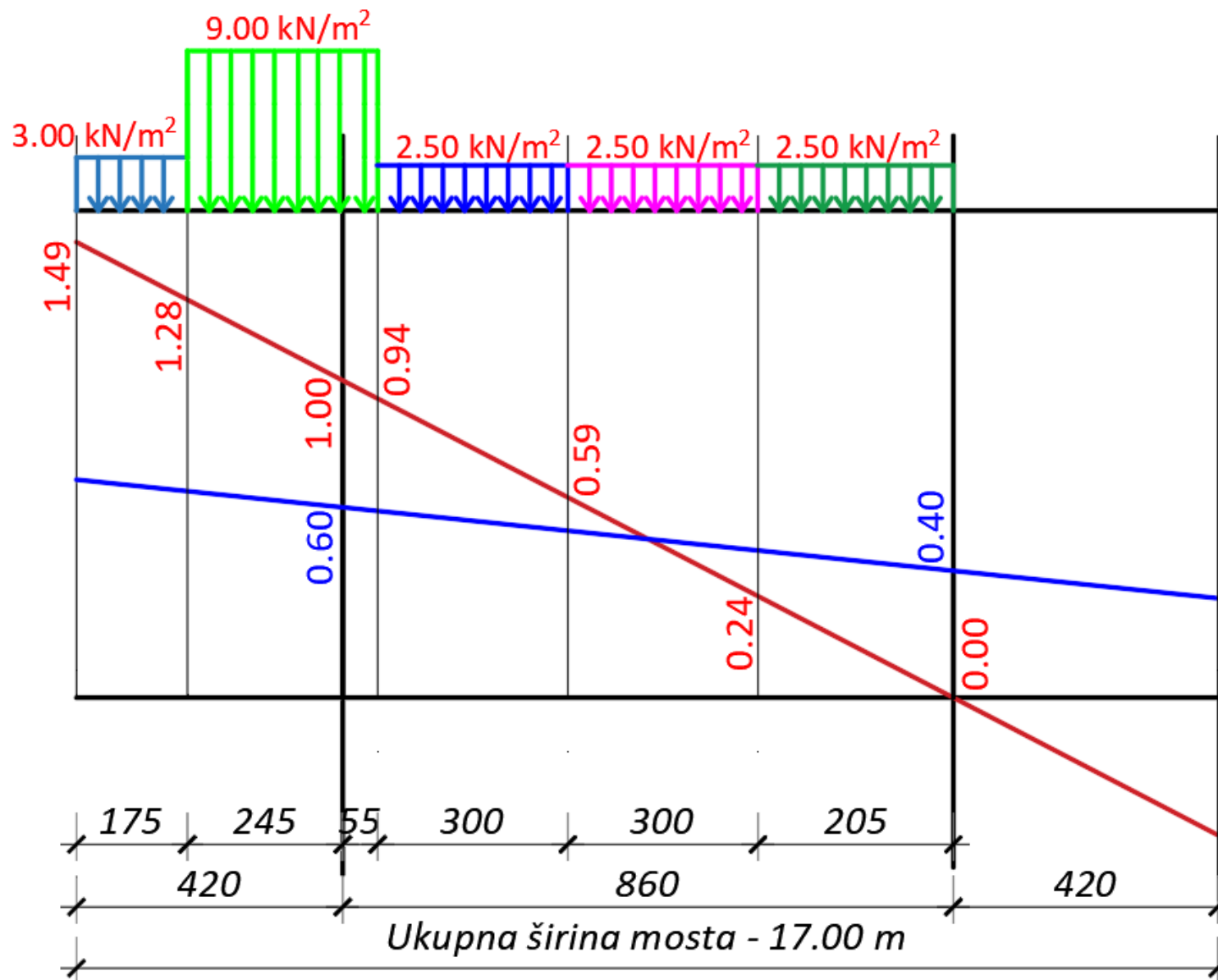


Плочаст систем

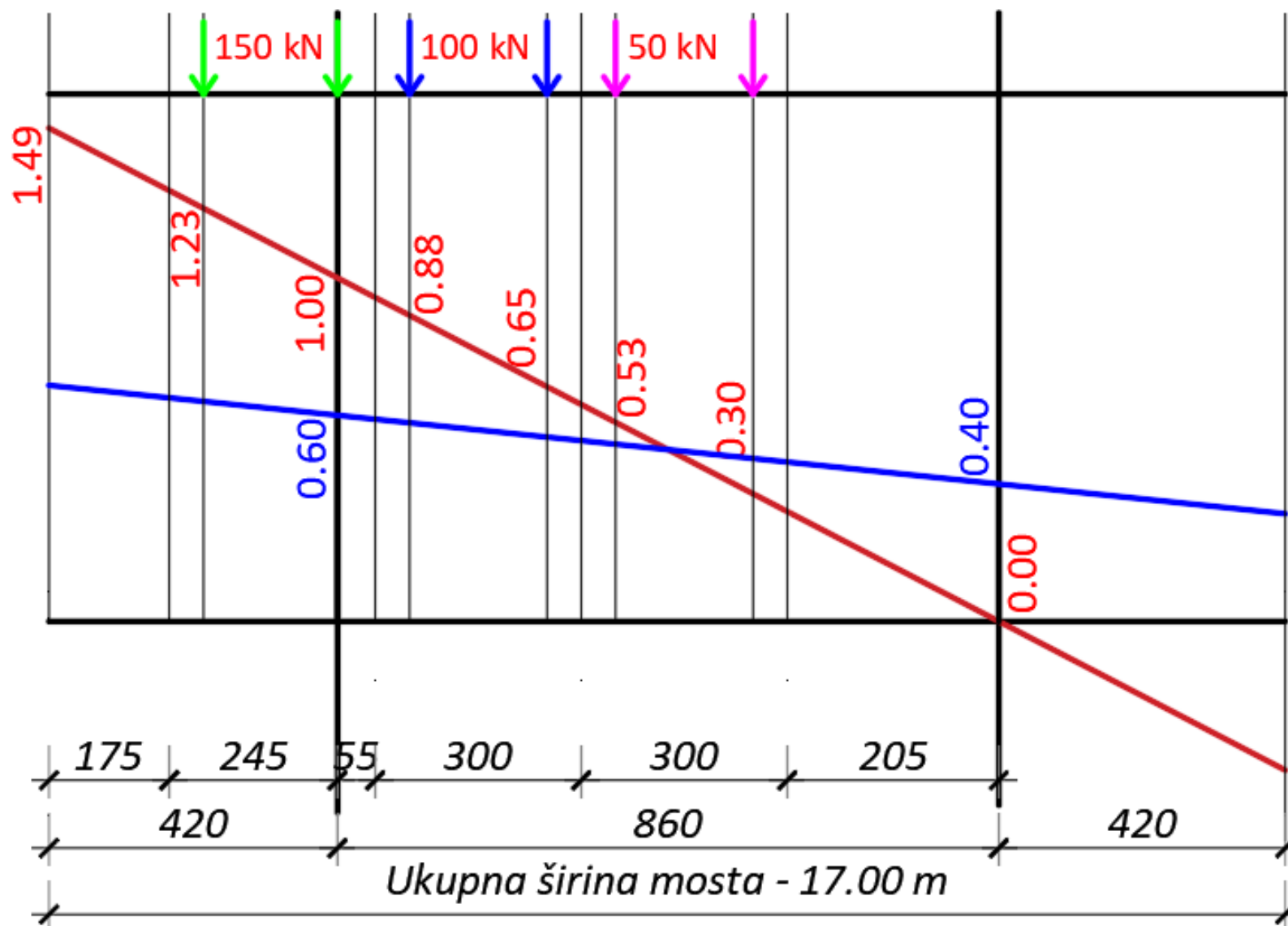


Гредни систем

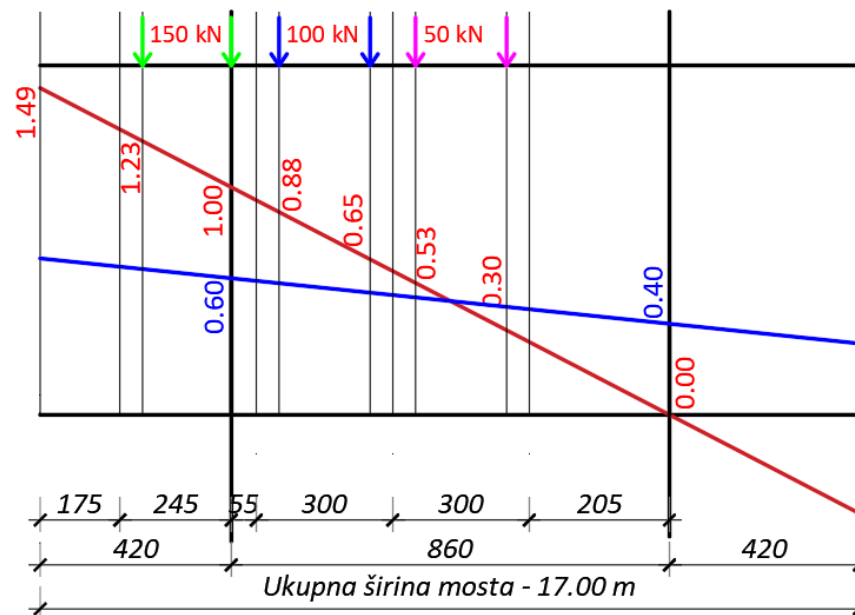
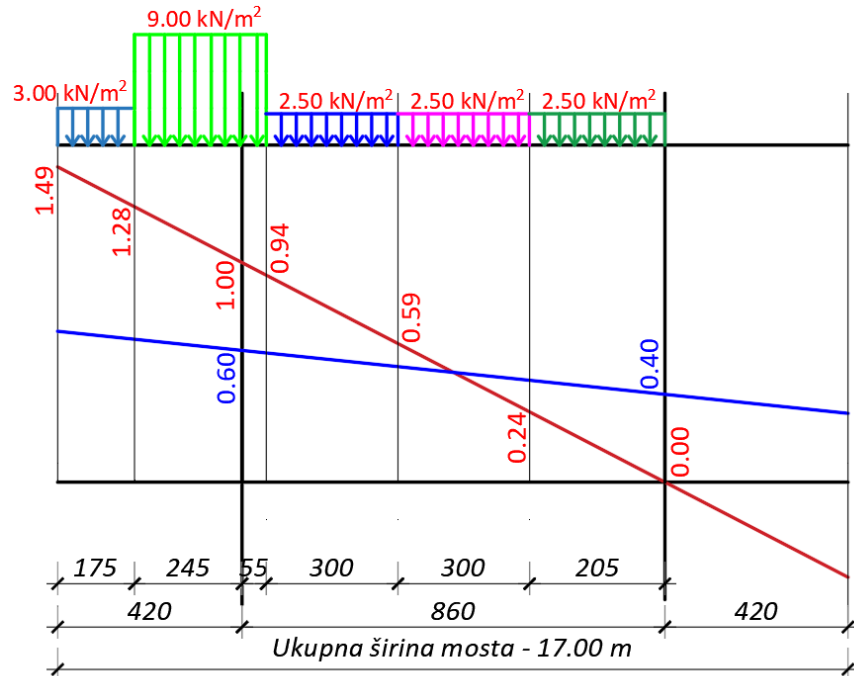
- Постављамо оптерећење у меродаван положај – **тежимо да оптерећења већег интензитета постављамо изнад већих ордината:**



- Постављамо оптерећење у меродаван положај – **тежимо да оптерећења већег интензитета постављамо изнад већих ордината:**



- Линијска шема саобраћајног оптерећења



За расподелу **1.00-0.00**:

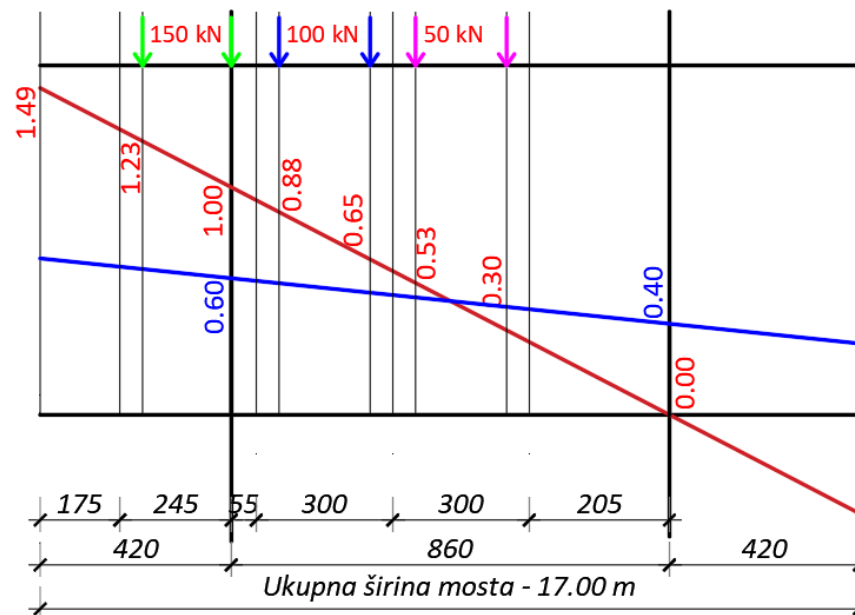
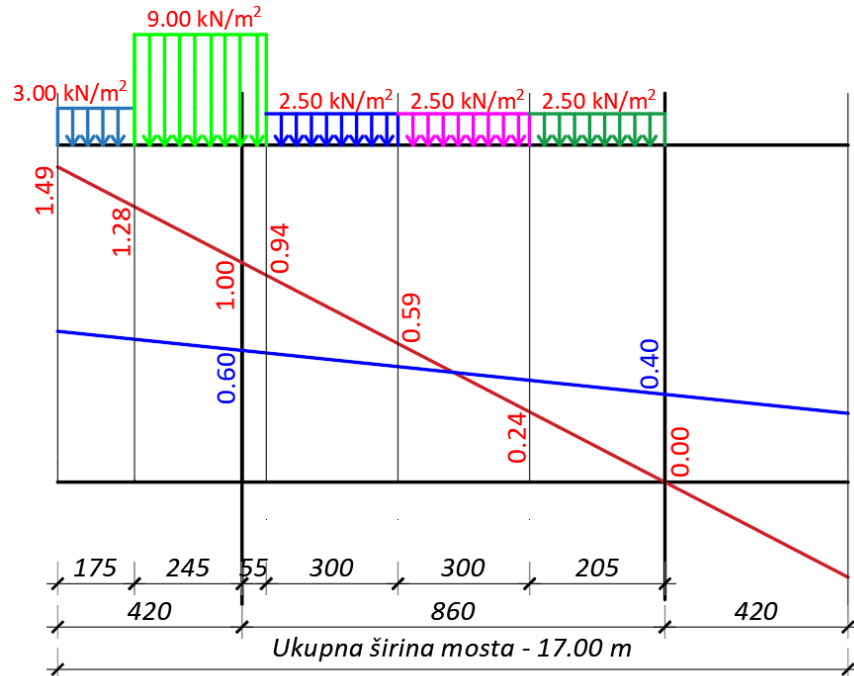
$$q = 3 \cdot 1.75 \cdot (1.49 + 1.28) / 2 + 9 \cdot 3.0 \cdot (1.28 + 0.94) / 2 + 2.50 \cdot 8.05 \cdot 0.94 / 2$$

$$q = 46.70 \text{ kN/m}$$

$$Q = 150 \cdot (1.23 + 1.00) + 100 \cdot (0.88 + 0.65) + 50 \cdot (0.53 + 0.30)$$

$$Q = 529 \text{ kN}$$

- Линијска шема саобраћајног оптерећења



За расподелу **0.60-0.40**:

Да ли је положај оптерећења исти?

Да ли су Q и q за расподелу 0.6/0.4 веће или мање него за 1.0/0?

ДОМАЋИ

Одредити шему оптерећења за расподелу 0.6/0.4

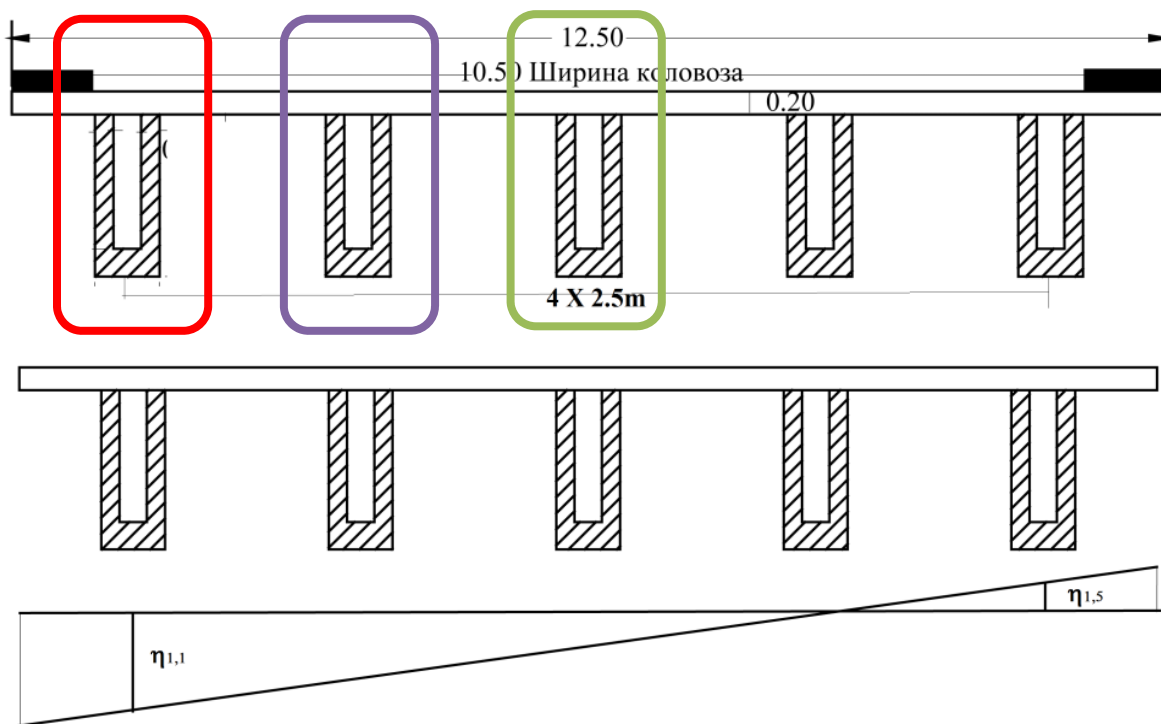
Одредити максимални M у пресеку у средини греде



ПРИМЕР 2 – Широки друмски мост са више главних носача

- Одредити линијску шему саобраћајног оптерећења за ивични носач на ребрастом друмском мосту
- Статички систем проста греда распона 20 m
- Дужина конзолних делова плоче 1.00 m
- Додатно стално оптерећење на пешачким стазама је 3.0 kN/m^2 , а на коловозу 2.5 kN/m^2
- Усвојити шему саобраћајног оптерећења према стандарду Еврокод (EN 1991-2: Дејства на конструкције - Део 2: Саобраћајно оптерећење на мостовима)





Носачи идентичног попречног пресека!

$$\eta_{i,k} = \frac{I_i}{\sum I_i} \pm \frac{a_k a_i I_i}{2 \sum a_i^2 I_i}$$

КОЛИЧНИК БРОЈА НОСАЧА

КОЛИЧНИК РАСТОЈАЊА

Ивични носач:

$$\eta_{1,1} = \frac{1}{5} + \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.6 ;$$

$$\eta_{1,5} = \frac{1}{5} - \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = -0.2$$

Унутрашњи носач:

$$\eta_{2,1} = \frac{1}{5} + \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.4$$

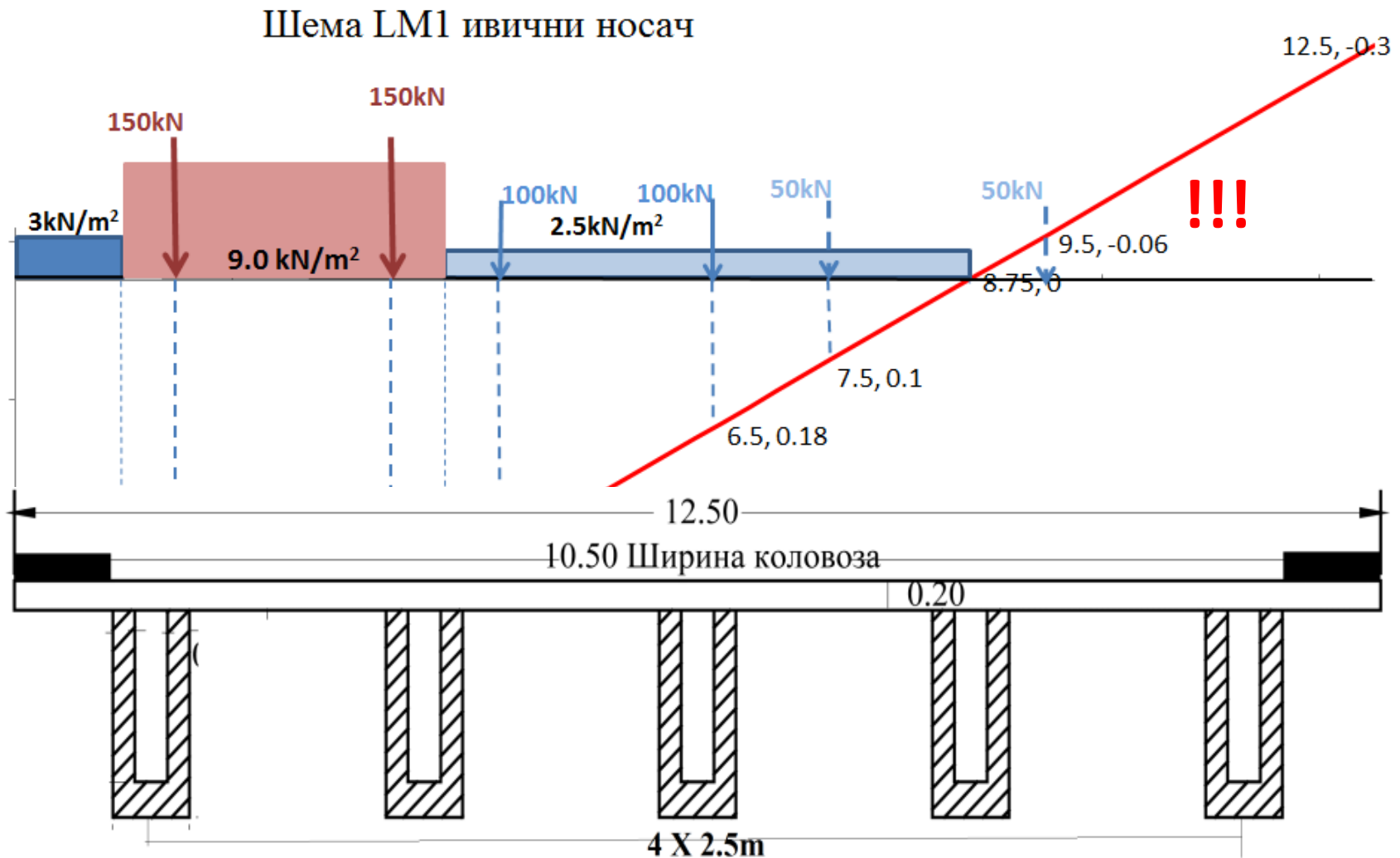
$$\eta_{2,5} = \frac{1}{5} - \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0$$

Средњи носач:

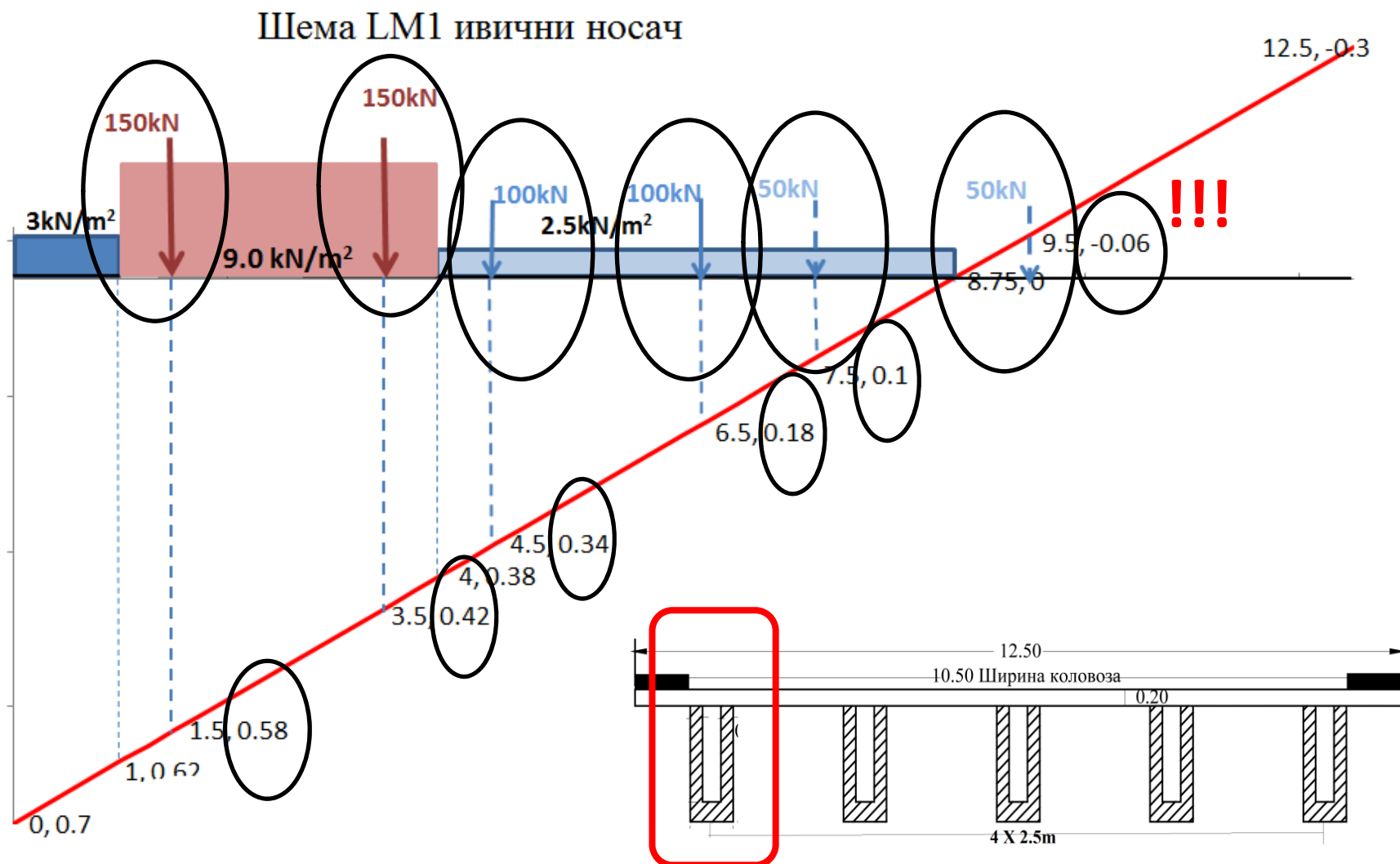
$$\eta_{3,1} = \frac{1}{5} + \frac{0 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.2 ;$$

$$\eta_{3,5} = \frac{1}{5} - \frac{0 \cdot 10}{2 \cdot (10^2 + 5^2 + 0^2)} = 0.2$$

Одређујемо вредност силе **Q** у линијској шеми оптерећења која репрезентује **тандем систем**:

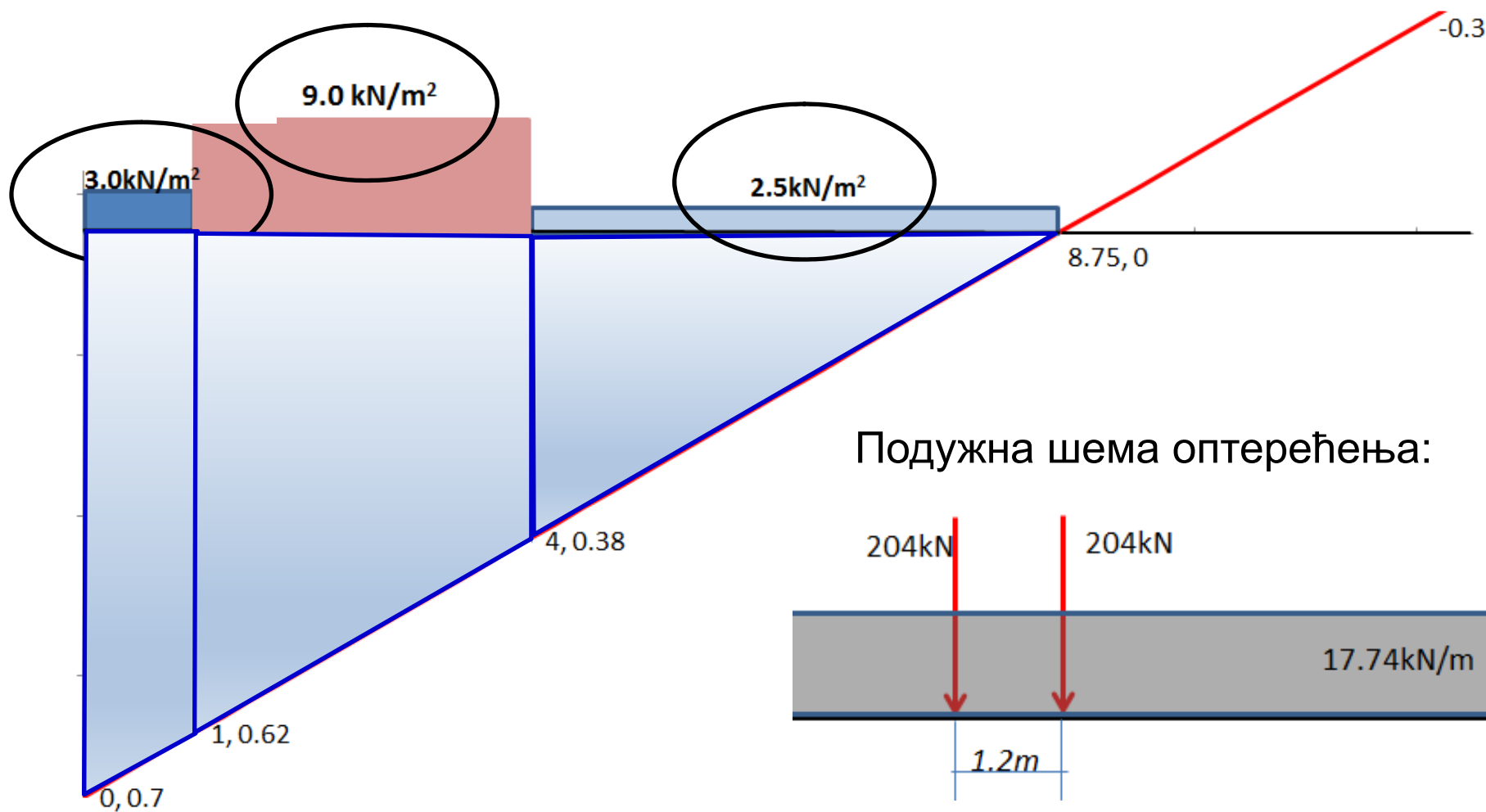


Одређујемо вредност силе **Q** у линијској шеми оптерећења која репрезентује **тандем систем**:



$$Q = 150 \cdot 0.58 + 150 \cdot 0.42 + 100 \cdot 0.34 + 100 \cdot 0.18 + 50 \cdot 0.10 + 50 \cdot (-0.06) = 204 \text{ kN}$$

Одређујемо вредност оптерећења q у линијској шеми оптерећења која репрезентује **површинско оптерећење**:



Подужна шема оптерећења:

$$q = 3 \cdot 1 \cdot (0.7 + 0.62) / 2 + 9 \cdot 3 \cdot (0.62 + 0.38) / 2 + 2.50 \cdot 4.75 \cdot 0.38 / 2 = 17.74 \text{ kN/m}$$

ДОМАЋИ: Одредити максимални M у пресеку у средини распона моста.



