

# BETONSKE KONSTRUKCIJE 1

HVE PŽA

**Vežba br.3**

***Nikola Tošić***

Kabinet br. 3

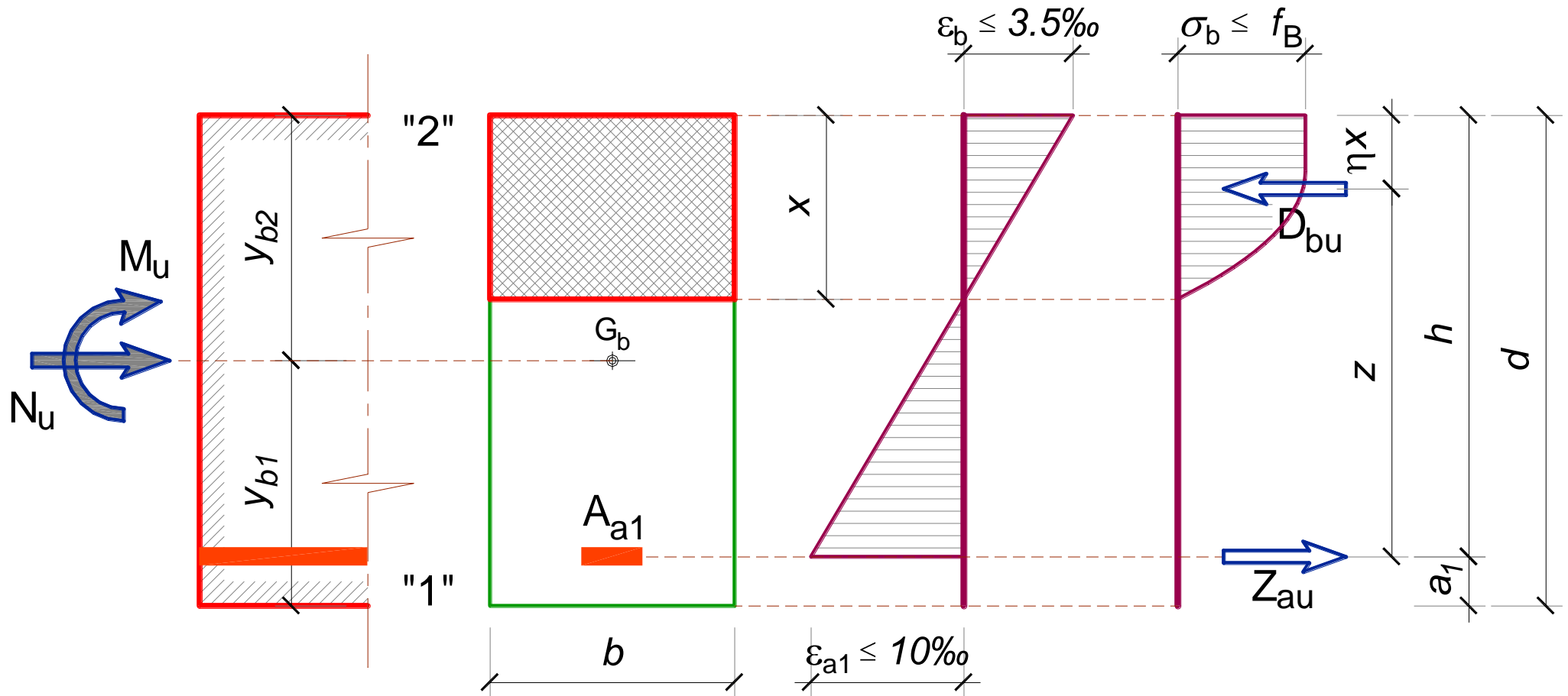
[ntosic@imk.grf.bg.ac.rs](mailto:ntosic@imk.grf.bg.ac.rs)

***Semestar: V***

***ESPБ: 6***

- 1. Složeno savijanje – Proračunski model**
- 2. Složeno savijanje – Vezano dimenzionisanje**
- 3. Složeno savijanje – Dvojno armiranje**
- 4. Složeno savijanje–Slobodno dimenzionisanje**

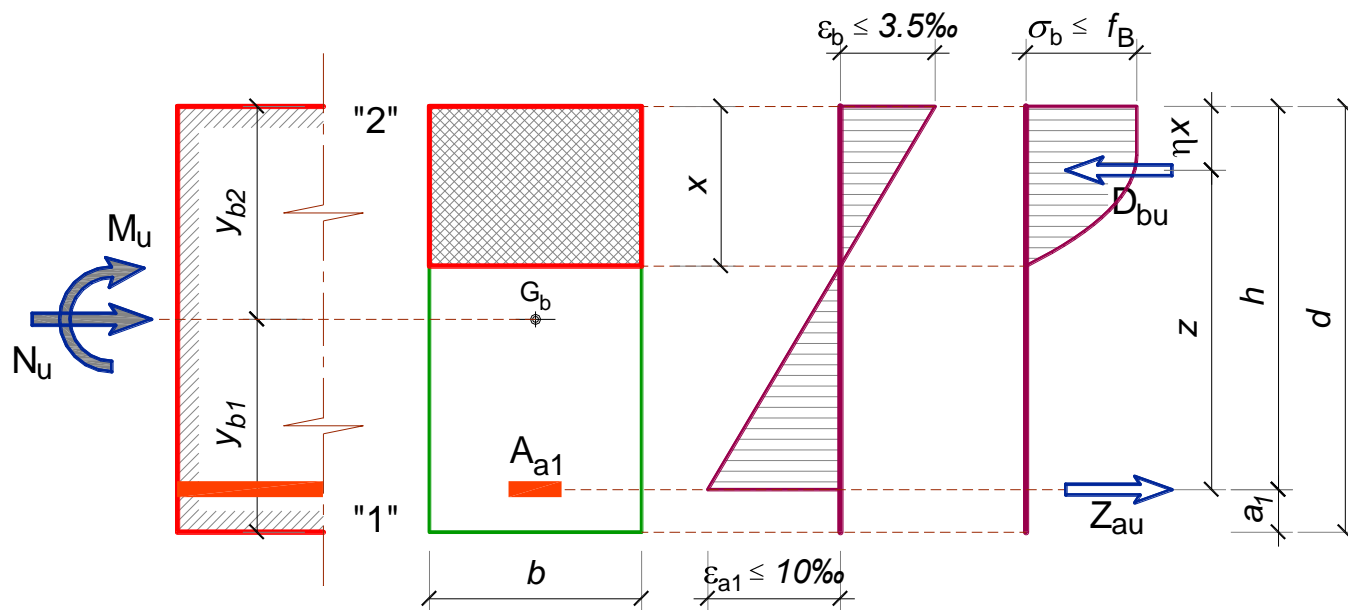
# 1. Proračunski model - pravougaoni presek



# Uslov ravnoteže **MOMENATA**

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}}$$

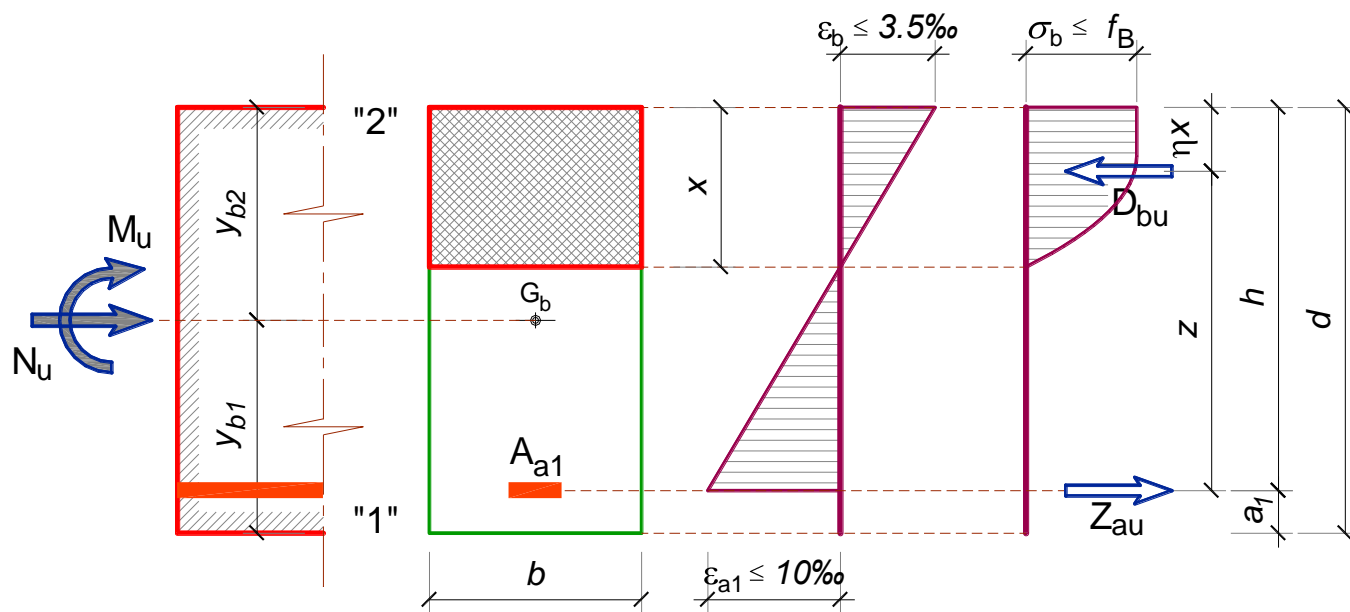
$$M_{au} = M_u + N_u \times y_{a1} = M_u + N_u \times \left( \frac{d}{2} - a_1 \right)$$



# Uslov ravnoteže **NORMALNIH SILA**

$$A_{a1} = \bar{\mu}_1 \times b \times h \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

$$A_{a1} = \frac{M_{au}}{z \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} = \frac{M_{au}}{\zeta \times h \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$



## 2. Složeno savijanje - VEZANO dimenzionisanje

### ➤ Poznato:

- *statički uticaji za ( $M_i$ ,  $N_i$ ) – sračunato*
- *kvalitet materijala ( $f_B$ ,  $\sigma_v$ ) – usvojeno*
- *dimenzije poprečnog preseka ( $b$ ,  $d$ )*

### ➤ Nepoznato:

- *površina armature ( $A_a$ )*
- *stanje dilatacija preseka ( $s$ )*

## 2. Složeno savijanje - VEZANO dimenzionisanje

1.

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i = g, p, \Delta)$$
$$N_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times N_i$$

2. Pretpostavlja se  $a_1$  i sračunava:

$$h = d - a_1$$

$$M_{au} = M_u + N_u \times \left( \frac{d}{2} - a_1 \right)$$

Sila **ZATEZANJA** se unosi sa **NEGATIVNIM** znakom

## 2. Složeno savijanje - VEZANO dimenzionisanje

3. Sračunava se koeficijent  $k$ :

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}} \xrightarrow{\text{TABLICE}} \bar{\mu} (\zeta)$$

*i pročitaju dilatacije  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_{a1}$ .*

*Ako je  $\varepsilon_{a1} \geq 3\text{‰}$ , sračunava se potrebna površina armature iz izraza:*



## 2. Složeno savijanje - VEZANO dimenzionisanje

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} \frac{N_u}{\sigma_v} \quad \text{ili:}$$

$$A_a = \frac{M_{au}}{z \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} = \frac{M_{au}}{\zeta \times h \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

Sila **ZATEZANJA** se unosi sa **NEGATIVNIM** znakom

Ako je  $\varepsilon_{a1} < 3\text{‰}$ , presek se **DVOSTRUKO** armira

## **2. Složeno savijanje - VEZANO dimenzionisanje**

- 4. Usvaja se broj i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u preseku ( $a_0$ , čisto rastojanje između šipki)**
- 5. Sračunava se položaj težišta  $a_1$  usvojene armature i statička visina  $h$  i upoređuje sa pretpostavljenom.**
  - **U slučaju znatnijih odstupanja, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću  $a_1$ .**
- 6. Konačno se konstruiše poprečni presek i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.**

## Primer 5 - VEZANO dimenzionisanje

- Odrediti potrebnu površinu armature za presek poznatih dimenzija, pravougaonog oblika, opterećen graničnim momentom savijanja  $M_u$  i silom **zatezanja**  $Z_u$ . Podaci za proračun:

$$M_u = 770 \text{ kNm} \quad b = 35 \text{ cm} \quad \text{MB 30}$$

$$Z_u = 720 \text{ kNm} \quad d = 70 \text{ cm} \quad \text{RA 400/500}$$

$$\text{MB 30} \quad \Rightarrow \quad f_B = 20.5 \text{ MPa} = 2.05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{RA 400/500} \quad \Rightarrow \quad \sigma_V = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

## Primer 5 - VEZANO dimenzionisanje

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm}$$

$$h = d - a_1 = 70 - 7 = 63 \text{ cm}$$

$$M_{au} = 770 + (-720) \times \left( \frac{0.70}{2} - 0.07 \right) = 568.4 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}} = \frac{63}{\sqrt{\frac{568.4 \times 10^2}{35 \times 2.05}}} = 2.238$$

$\varepsilon_a$	$\varepsilon_b$	s	$\alpha$	$\eta$	$\zeta$	$\mu_{1M} \%$	k
9.05	3.5	0.279	0.810	0.416	0.884	22.576	2.238

## Primer 5 - VEZANO dimenzionisanje

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

$$A_a = 22.576 \times \frac{35 \times 63}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{(-720)}{40} = 43.51 \text{ cm}^2$$

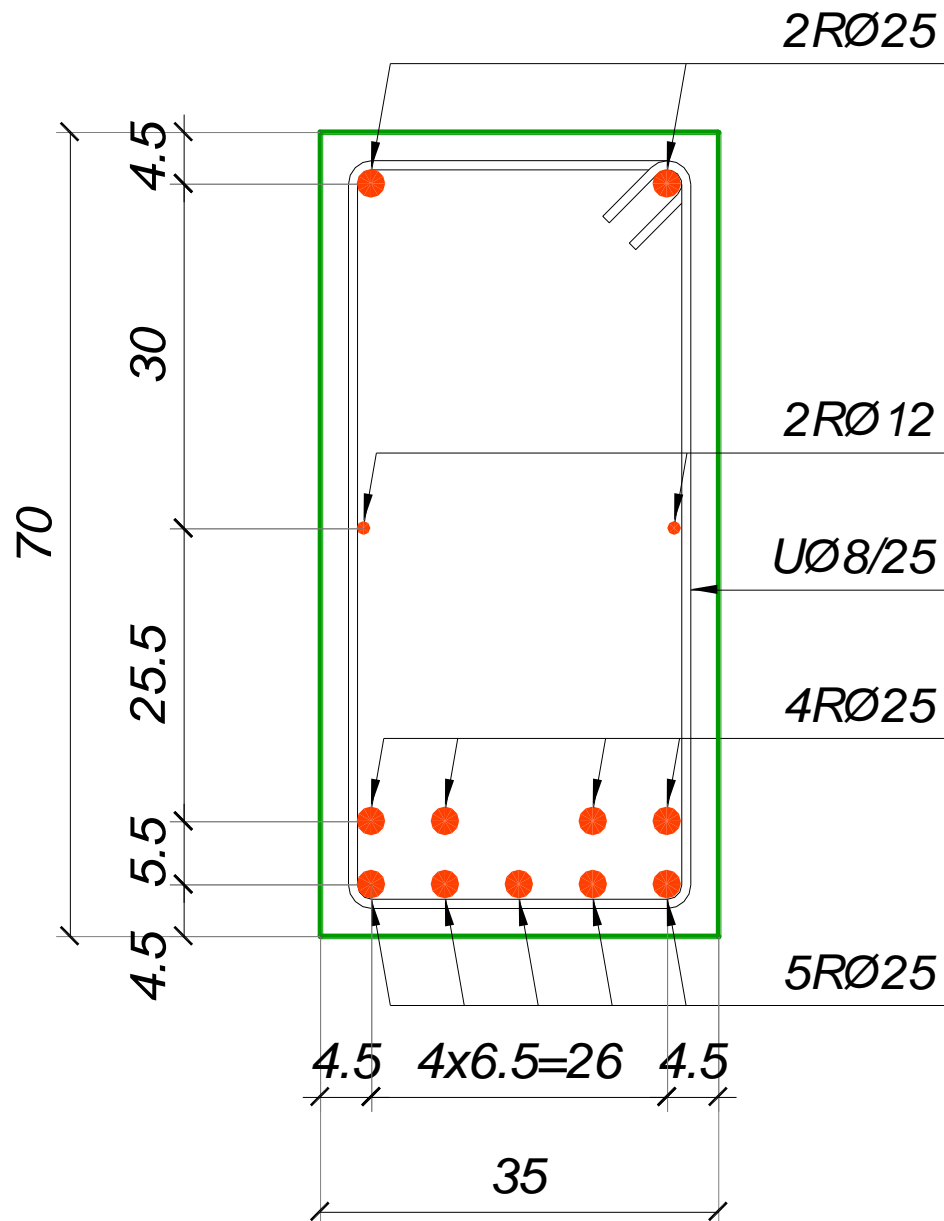
ili:

$$A_a = \frac{M_{au}}{z \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} = \frac{M_{au}}{\zeta \times h \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

$$A_a = \left( \frac{568.4 \times 10^2}{0.884 \times 63} - (-720) \right) \times \frac{1}{40} = 43.52 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **9RØ25** (44.18 cm<sup>2</sup>)

## Primer 5 - VEZANO dimenzionisanje



$$a' = a_0 + \varnothing_u + \varnothing/2$$

$$a' = 2.5 + 0.8 + 2.5/2 = 4.55 \text{ cm}$$

$$\text{usv. } a' = 4.5 \text{ cm}$$

$$a'' = a' + e_v + 2 \times \varnothing/2$$

$$a'' = 4.5 + 3.0 + 2 \times 2.5/2$$

$$\text{usv. } a'' = 10 \text{ cm}$$

$$a_1 = (5 \times 4.5 + 4 \times 10)/9$$

$$a_1 = 6.94 \text{ cm}$$

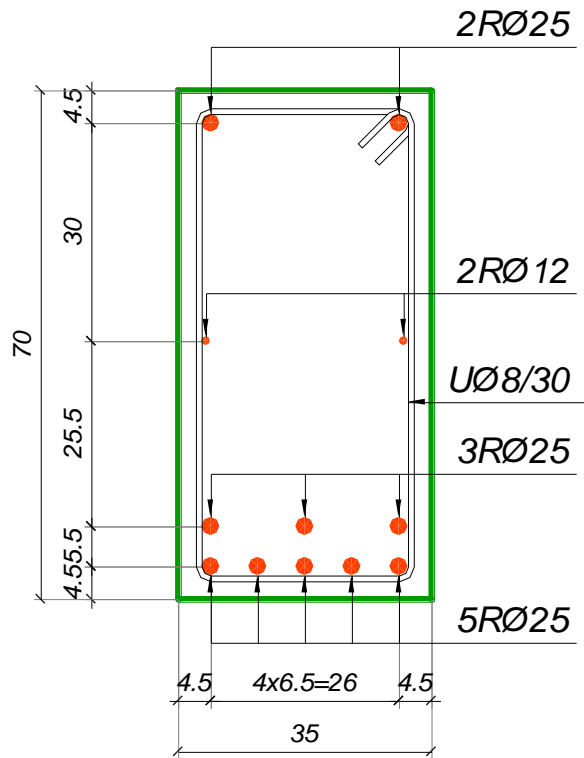
$$h = 70 - 6.94 = 63.06 \text{ cm} > 63 \text{ cm}$$

# POREĐENJE - primeri 1, 4 i 5 sa materijala

## “01 – Savijanje – pravougaoni presek”

➤ U primerima 1, 4 i 5 dimenzionisan je poprečni presek istih dimenzija i kvaliteta materijala, u sva tri slučaja opterećen istim momentom savijanja. Jedini parametar koji je variran je normalna sila.

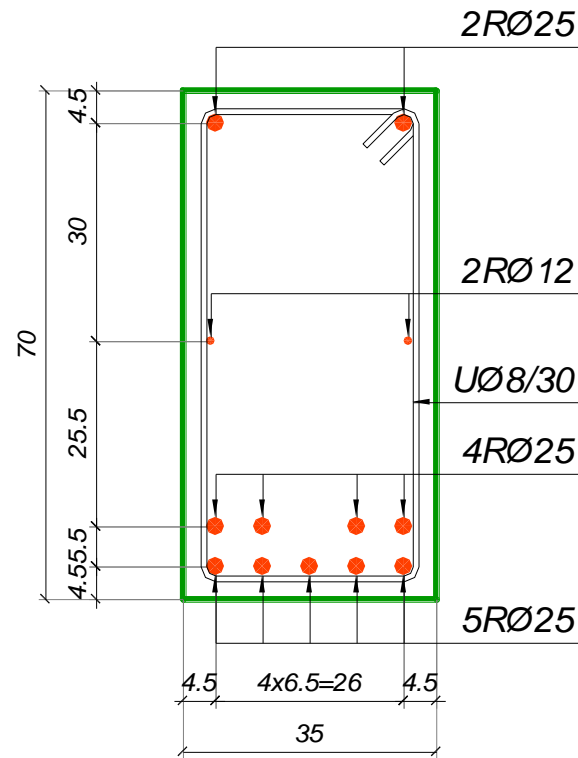
**1.  $M_u = 770 \text{ kNm}$**



$$A_{a,potr} = 36.59 \text{ cm}^2$$

usvojeno: 8RØ25

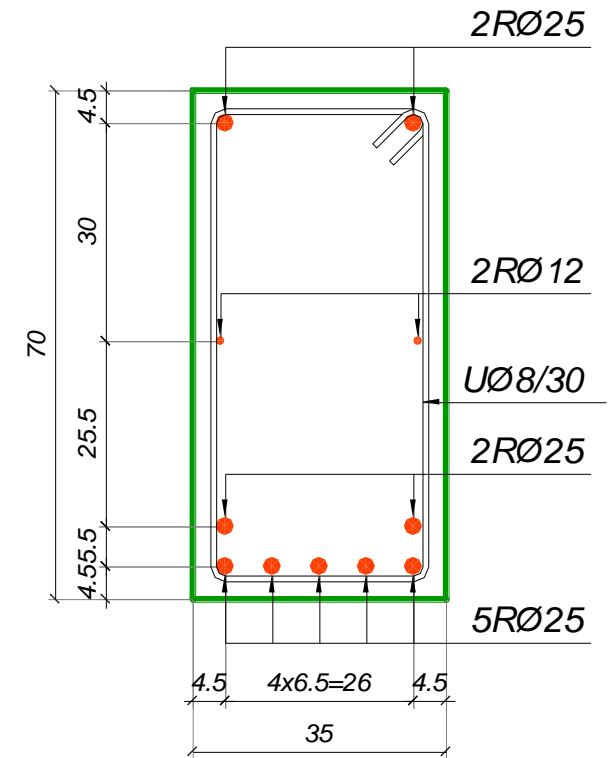
**4.  $M_u = 770 \text{ kNm}$   
 $Z_u = 720 \text{ kN}$**



$$A_{a,potr} = 44.18 \text{ cm}^2$$

usvojeno: 9RØ25

**5.  $M_u = 770 \text{ kNm}$   
 $N_u = 720 \text{ kN}$**



$$A_{a,potr} = 30.95 \text{ cm}^2$$

usvojeno: 7RØ25

### 3. Složeno savijanje – Dvojno armiranje

1.

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i = g, p, \Delta)$$
$$N_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times N_i$$

2. Pretpostavlja se  $a_1$  i sračunava:

$$h = d - a_1$$

$$M_{au} = M_u + N_u \times \left( \frac{d}{2} - a_1 \right)$$

Sila **ZATEZANJA** se unosi sa **NEGATIVNIM** znakom



### 3. Složeno savijanje – Dvojno armiranje

3. Sračunava se koeficijent  $k$ :

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}} \xrightarrow{\text{TABLICE}} \bar{\mu} (\zeta)$$

i pročitaju dilatacije  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_{a1}$ .

Ako je  $\varepsilon_{a1} < 3\text{‰}$ , presek se **DVOSTRUKO ARMIRA**.

## Dvojno armirani presecci

3a. Određuje se **MOMENT NOSIVOSTI JEDNOSTRUKO ARMIRANOG PRESEKA**, sa procentom armiranja  $\mu_{1M}^*$  i koeficijentom  $k^*$  koji odgovaraju dilataciji armature koja se želi zadržati (po pravilu  $\varepsilon_{a1}^* = 3\text{‰}$ )

$$M_{abu} = \left( \frac{h}{k^*} \right)^2 \times b \times f_B$$

Preostali deo spoljašnjeg momenta savijanja:

$$\Delta M_{au} = M_{au} - M_{abu}$$

se prihvata **dodatnom zategnutom i pritisnutom armaturom.**

## Dvojno armirani preseki

Pretpostavlja se položaj težišta pritisnute armature  $a_2$  i određuju se površine zategnute i pritisnute armature u preseku, iz izraza:

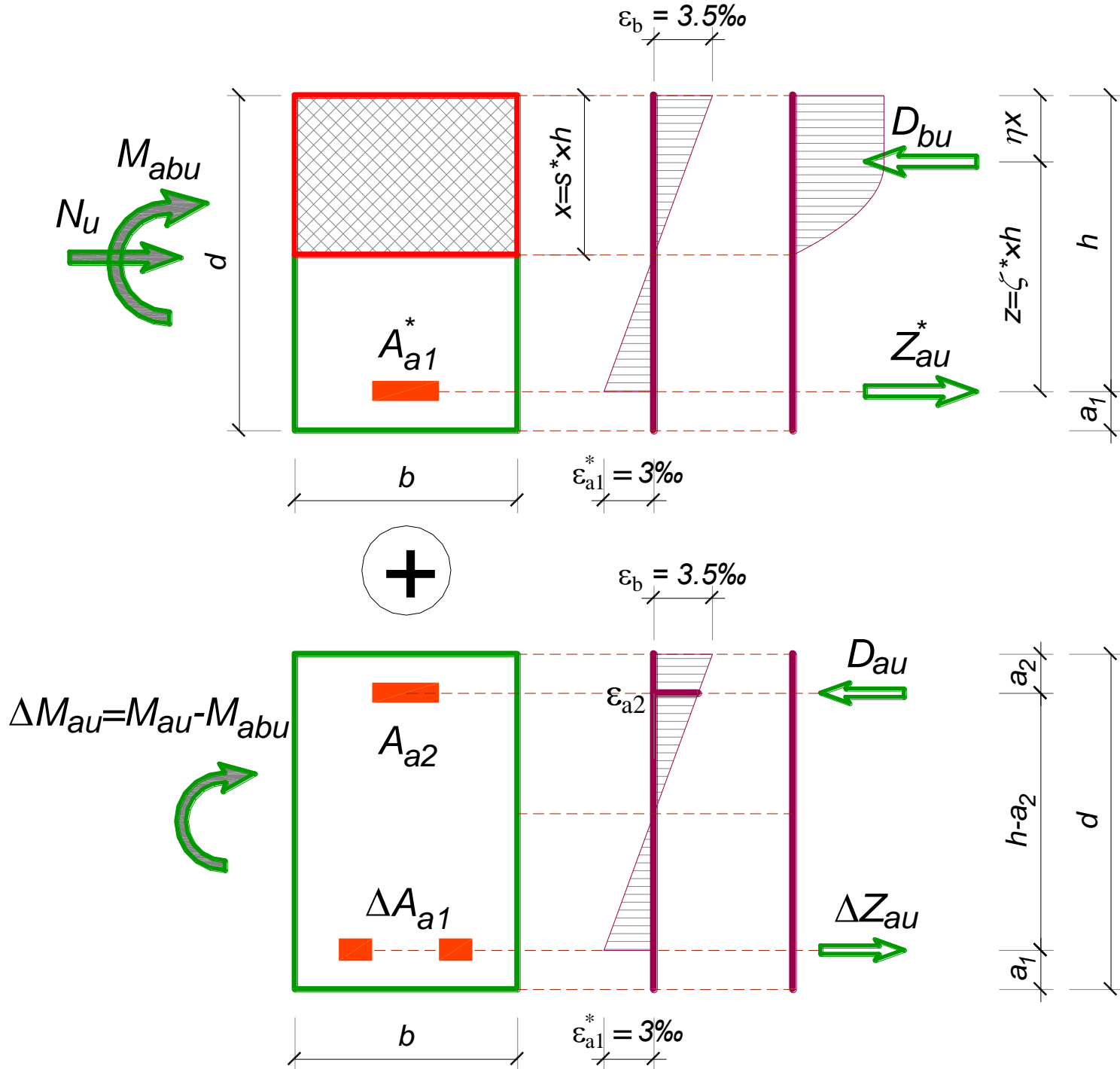
$$A_{a2} = \frac{\Delta M_{au}}{(h - a_2) \times \sigma_v}$$

odnosno:

$$A_{a1} = \bar{\mu}^* \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} + A_{a2}$$

ili:

$$A_{a1} = \frac{M_{abu}}{\zeta^* \times h \times \sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} + A_{a2}$$



# Dvojno armirani presecci

Ukoliko je:

- $A_{a2} \leq A_{a1}$  - i zategnuta i pritisnuta zona se armiraju sračunatim površinama armature;
- $A_{a1} \leq A_{a2} \leq 1.5 \times A_{a1}$  - obe zone se armiraju **simetrično**, srednjom vrednošću sračunatih površina;
- $A_{a2} > 1.5 \times A_{a1}$  - presek se armira simetrično, ali se potrebna površina armature određuje pomoću **dijagrama interakcije**. Primena dijagrama interakcije je moguća i u slučaju (b).

## ***Dvojno armirani presecci***

- 4. Usvaja se broj i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u preseku ( $a_0$ , čisto rastojanje između šipki)***
- 5. Sračunava se položaj težišta  $a_1$  usvojene armature i statička visina  $h$  i upoređuje sa pretpostavljenom.***
  - U slučaju znatnijih odstupanja, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću  $a_1$ .***
- 6. Konačno se konstruiše poprečni presek i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.***

## Primer 6 - Dvojno armiranje

- Odrediti **potrebnu površinu armature** za presek poznatih dimenzija, pravougaonog oblika, opterećen momentom savijanja  $M_g$  i silom pritiska  $N_g$ . Podaci za proračun:

$$M_g = 360 \text{ kNm} \qquad b = 30 \text{ cm} \qquad \text{MB 30}$$

$$N_g = 1000 \text{ kN} \qquad d = 60 \text{ cm} \qquad \text{RA 400/500}$$

$$\text{MB 30} \quad \Rightarrow \quad f_B = 20.5 \text{ MPa} = 2.05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{RA 400/500} \quad \Rightarrow \quad \sigma_V = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_u = 1.6 \times 360 = 576 \text{ kNm}$$

$$N_u = 1.6 \times 1000 = 1600 \text{ kN}$$

## Primer 6 - Dvojno armiranje

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm}$$

$$h = d - a_1 = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$$

$$M_{au} = 576 + 1600 \times \left( \frac{0.60}{2} - 0.07 \right) = 944 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{53}{\sqrt{\frac{944.0 \times 10^2}{30 \times 2.05}}} = 1.353 \Rightarrow \varepsilon_{a1} < 3.0\text{‰}$$

**Kako je  $\varepsilon_{a1} < 3\text{‰}$ , presek se **DVOSTRUKO** armira**



## Primer 6 - Dvojno armiranje

usvojeno  $\varepsilon_{a1}^* = 3\text{‰}$   $\Rightarrow$   $k^* = 1.719$ ,  $\mu_{1M}^* = 43.590\%$

$\varepsilon_a$	$\varepsilon_b$	$s$	$\alpha_b$	$\eta$	$\zeta$	$\mu_{1M} \%$	$k$
3	3.5	0.538	0.810	0.416	0.776	43.590	1.719

$$M_{abu} = \left( \frac{53}{1.719} \right)^2 \times 30 \times 2.05 \times 10^{-2} = 584.4 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{au} = 944 - 584.4 = 359.6 \text{ kNm}$$

## Primer 6 - Dvojno armiranje

$$a_2 = 7 \text{ cm} \Rightarrow A_{a2} = \frac{359.6 \times 10^2}{(53 - 7) \times 40} = 19.55 \text{ cm}^2$$

$$A_{a1} = 43.590 \times \frac{30 \times 53}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{1600}{40} + 19.55 = 15.07 \text{ cm}^2$$

**Kako je zadovoljen uslov**

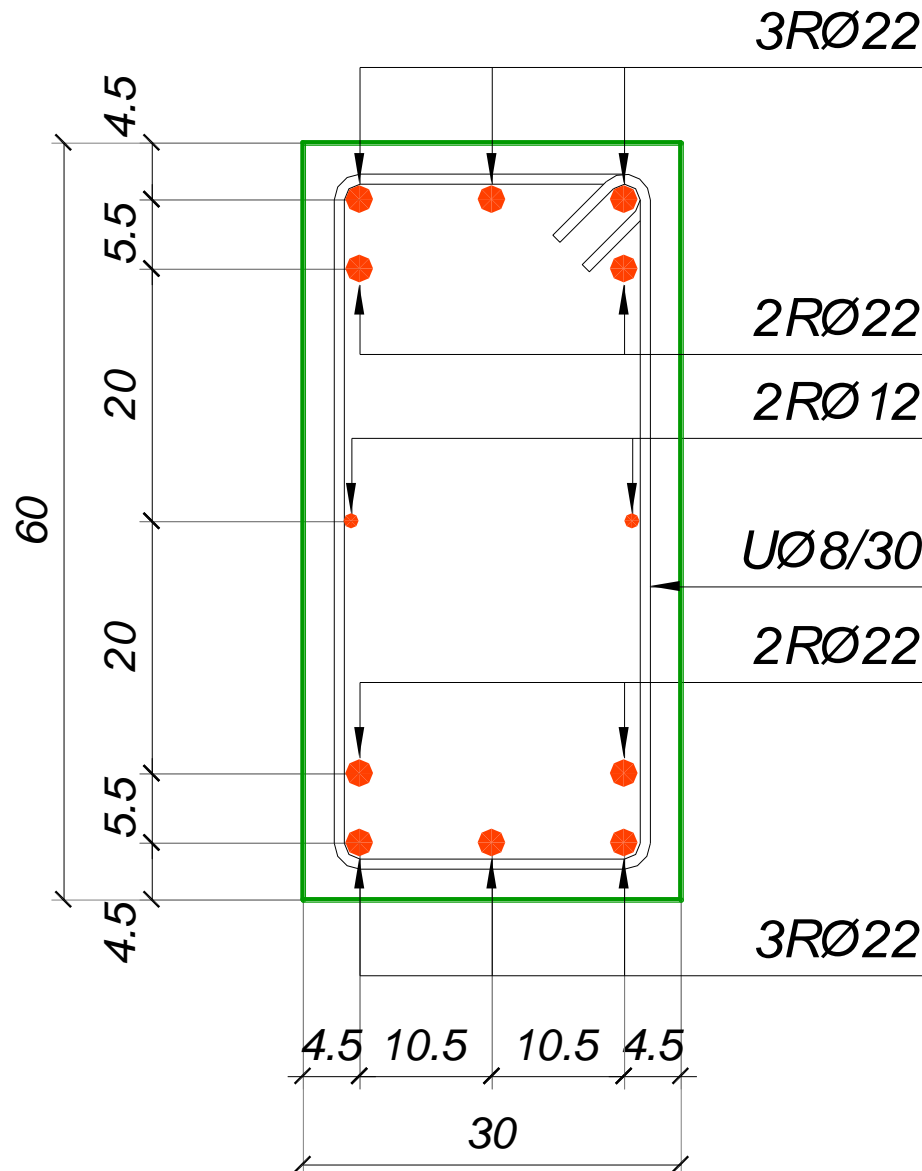
$$A_{a1} \leq A_{a2} \leq 1.5 \times A_{a1}$$

**preseki se armiraju simetrično, armaturom:**

$$A_{a1} = A_{a2} = \frac{19.55 + 15.07}{2} = 17.31 \text{ cm}^2$$

**usvojeno:  $\pm 5R\emptyset 22$  ( $\pm 19.00 \text{ cm}^2$ )**

# Primer 6 – Dvojno armiranje



$$a' = a_0 + \varnothing_u + \varnothing/2$$

$$a' = 2.5 + 0.8 + 2.2/2 = 4.4 \text{ cm}$$

$$\text{usv. } a' = 4.5 \text{ cm}$$

$$a'' = a' + e_v + 2 \times \varnothing/2$$

$$a'' = 4.5 + 3.0 + 2 \times 2.2/2 = 9.7 \text{ cm}$$

$$\text{usv. } a'' = 10 \text{ cm}$$

$$a_1 = (3 \times 4.5 + 2 \times 10)/5$$

$$a_1 = 6.7 \text{ cm}$$

$$h = 60 - 6.7 = 53.3 \text{ cm} > h_{pretp}$$

## 4. Složeno savijanje-**SLOBODNO** dimenzionisanje

1. Sračunavaju se granični računski statički uticaji

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i = g, p, \Delta)$$
$$N_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times N_i$$

2. Usvajaju se  $\varepsilon_b$  i  $\varepsilon_a$ , pri čemu bar jedna mora dostići graničnu vrednost.

Za usvojene vrednosti dilatacija iz tabela se očitavaju koeficijenti  $k$  i  $\mu_{1M}$ , odnosno  $\zeta$ .

## 4. Složeno savijanje-**SLOBODNO** dimenzionisanje

3. Sračunava se statička visina  $h$ . Međutim, ovde je postupak iterativan, jer u izrazu za statičku visinu figuriše zasad nepoznata visina  $d$ :

$$M_{au} = M_u + N_u \times \left( \frac{d}{2} - a_1 \right) \Rightarrow h = k \sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}$$

U prvom koraku se pretpostavi  $M_{au} = M_u$  pa sledi:

$$M'_{au} = M_u \Rightarrow h' = k \sqrt{\frac{M'_{au}}{b \times f_B}} = k \sqrt{\frac{M_u}{b \times f_B}}$$

## 4. Složeno savijanje-**SLOBODNO** dimenzionisanje

Sa tako određenom visinom se ponavlja proračun sve do postizanja željene tačnosti (razlika  $d^{i-1}$  i  $d^i$ ). Zatim se sračunava potrebna površina armature:

$$A_a = \mu \times \frac{b \times h^i}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

4. Usvaja se broj i prečnik šipki armature
5. Sračunava se položaj težišta  $a_1$  i usvaja visina preseka
 
$$d = h + a_1$$
6. Konačno se konstruiše poprečni presek i prikazuje u razmeri