

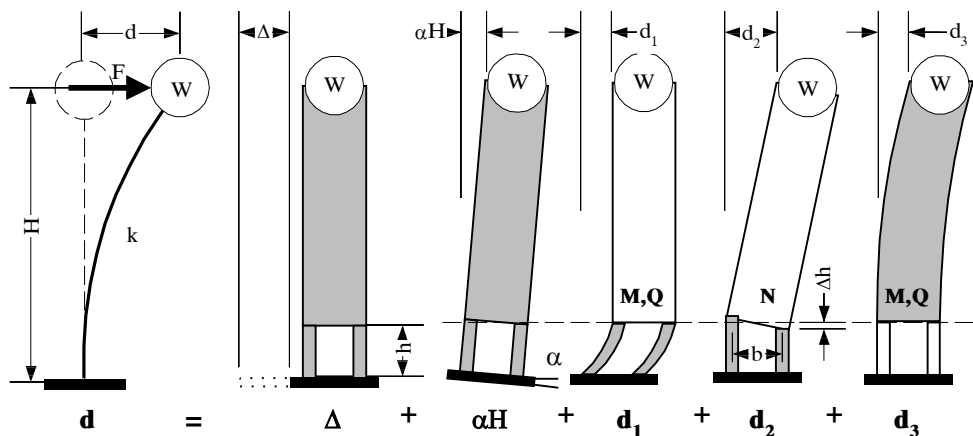
## 2. PONAŠANJE PRI ZEMLJOTRESU LINEARNO ELASTIČNIH SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

### UVOD

Poznavanje ponašanja konstrukcije, uz pretpostavku njenog elastičnog *odgovora na kretanje tla* pri zemljotresu je osnovni podatak za ocenu efekata zemljotresa na konstrukcije. Realne konstrukcije najčešće imaju više stepeni slobode, ali je *prvi ton oscilacija* najčešće dominantan, i predstavlja osnovu većine *propisa* u ovoj oblasti. Nakon definisanja osnovnih pojmova iz dinamike konstrukcija, prikazan je odgovor dva elastična sistema sa jednim stepenom slobode, na dva karakteristična zapisa ubrzanja tla - akcelerograma. U nastavku, rešenje se generalizuje na ceo opseg sopstvenih perioda realnih građevinskih konstrukcija, formulisanjem *elastičnih spektara ubrzanja i pomeranja*.

### 2.1 REKAPITULACIJA OSNOVNIH POJMOVA IZ DINAMIKE KONSTRUKCIJA

Za opisivanje kretanja jedne mase konstrukcije u prostoru u opštem slučaju potrebno je šest komponenti pomeranja, tri *translacije* i tri *rotacije mase*. Zavisno od *dispozicije konstrukcije, rasporeda masa* kao i pravca dejstva *dinamičke pobude - kretanja tla*, broj *nezavisnih komponenti* pomeranja koji je dovoljan da se opiše kretanje se smanjuje, i naziva se *broj stepeni slobode*. U slučaju dominantnog horizontalnog kretanja jedne mase u ravni, govori se o sistemu sa *jednim stepenom slobode* - nepoznatim horizontalnim pomeranjem mase  $d(t)$  u toku vremena, slika 2.1.



Slika 2.1 Komponente pomeranja sistema sa jednim stepenom slobode

Pri dejstvu spoljne *statičke* sile  $F$ , horizontalno pomeranje  $d$  mase u opštem slučaju posledica je više komponenti pomeranja: pomeranja  $\delta$  usled klizanja temelja, pomeranja  $\alpha H$  usled rotacije temelja za ugao  $\alpha$ , pomeranje  $d_1$  i  $d_3$  usled deformacija savijanja i smicanja i pomeranja  $d_2$  usled aksijalnog opterećenja pojedinih delova konstrukcije, slika 2.1

$$d = \Delta + \alpha H + d_1 + d_2 + d_3 = \delta F = F/k \quad (2.1)$$

Ukupno pomeranje  $\delta$  usled jedinične sile  $F=1$ , naziva se *fleksibilnost konstrukcije* ("matrica fleksibilnosti"), dok se inverzna vrednost  $k=1/\delta$  naziva *krutost konstrukcije na pomeranje* ("matrica krutosti"). U većini slučajeva, fleksibilnost odnosno krutost konstruk-

cije mogu dovoljno tačno da se odrede samo iz deformacija savijanja, na osnovu *krutosti EI preseka na savijanje*.

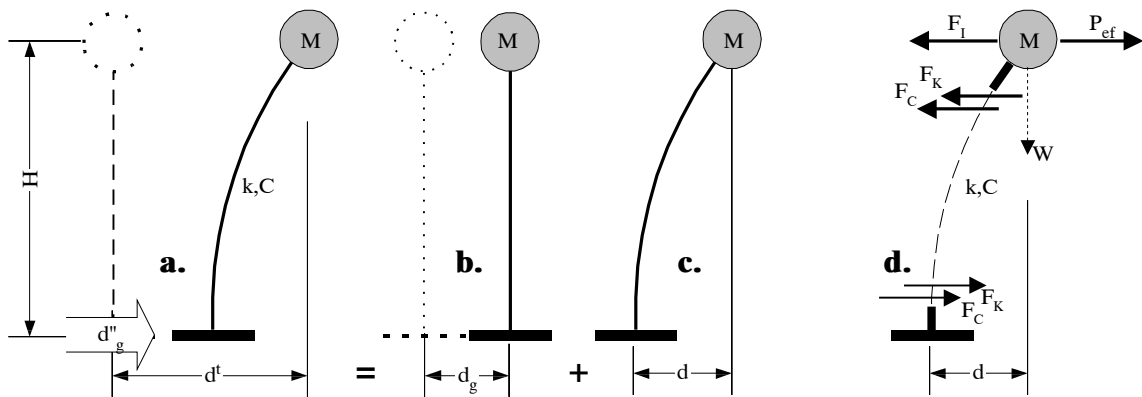
Pri kretanju tla sa značajnijim ubrzanjem  $d''_g(t)$ , problem postaje *dinamički*, jer se u konstrukciji javljaju i *inercijalne sile*. Osnovne dinamičke karakteristike sistema su *period sopstvenih oscilacija* sistema

$$T=2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(m\delta)} \quad (2.2)$$

odnosno *kružna frekvencija* sopstvenih oscilacija

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{(k/m)} \quad (2.3)$$

gde je  $m$  - masa sistema.



Slika 2.2 Osnovni parametri dinamičkog modela

Ukupno pomerenje  $d'$  mase u odnosu na početni položaj u prostoru jednako je zbiru pomaranja  $d_g$  konstrukcije kao *krutog tela* zajedno sa tлом, slika 2.1.b, i *relativnog pomaranja*  $d$  mase u odnosu na temelj, slika 2.1.c. Totalno, *apsolutno ubrzanje* mase u prostoru iznosi  $d''' = d''_g + d''$ .

Odgovor konstrukcije na kretanje tla sa promenljivim ubrzanjem  $d''_g(t)$  može da se odredi na osnovu rešenja problema *relativnog kretanja* mase konstrukcije sa *nepomerljivim temeljom*, opterećene *efektivnom dinamičkom silom* u centru mase  $P_{ef} = -md''_g$  slika 2.1.d.

U svakom trenutku vremena  $t$ , rezultanta horizontalnog "spoljnog opterećenja" - zbir *efektivne*  $P_{ef}$  i *inercijalne sile*  $F_I = md''_g$  usled relativnog ubrzanja, u ravnoteži je sa *unutrašnjim silama* konstrukcije, *otporu* elastične konstrukcije pomaranjima -  $F_K = kd$ , i *sili prigušenja* kretanja  $F_C = cd'$ , gde je  $c$  - *viskozno prigušenje* a  $d'$  - *relativna brzina* kretanja, slika 2.1.d

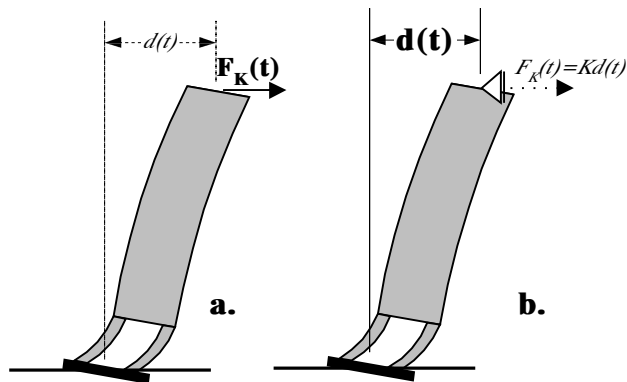
$$P_{ef} - F_I - F_K - F_C = 0 \quad \text{odnosno} \quad (2.4)$$

$$md'' + cd' + kd = -md''_g \quad (2.5)$$

Podeljena sa masom  $m$ , jednačina (2.5) glasi

$$d'' + 2\xi\omega d' + \omega^2 d = -d''_g \quad (2.6)$$

gde je  $\xi = c/2m\omega$  *koeficijent prigušenja*, a  $A(t) = \omega^2 d$  "*pseudo ubrzanje*" mase. Za veličine koeficijenta prigušenja  $\xi < 0,10$ , pseudo ubrzanje, koje određuje iznos naprezanja konstrukcije praktično je jednako totalnom ubrzanju, koje utiče kako na ljude, tako i na opremu objekta,  $(d''_g + d'') \approx \omega^2 d$ .



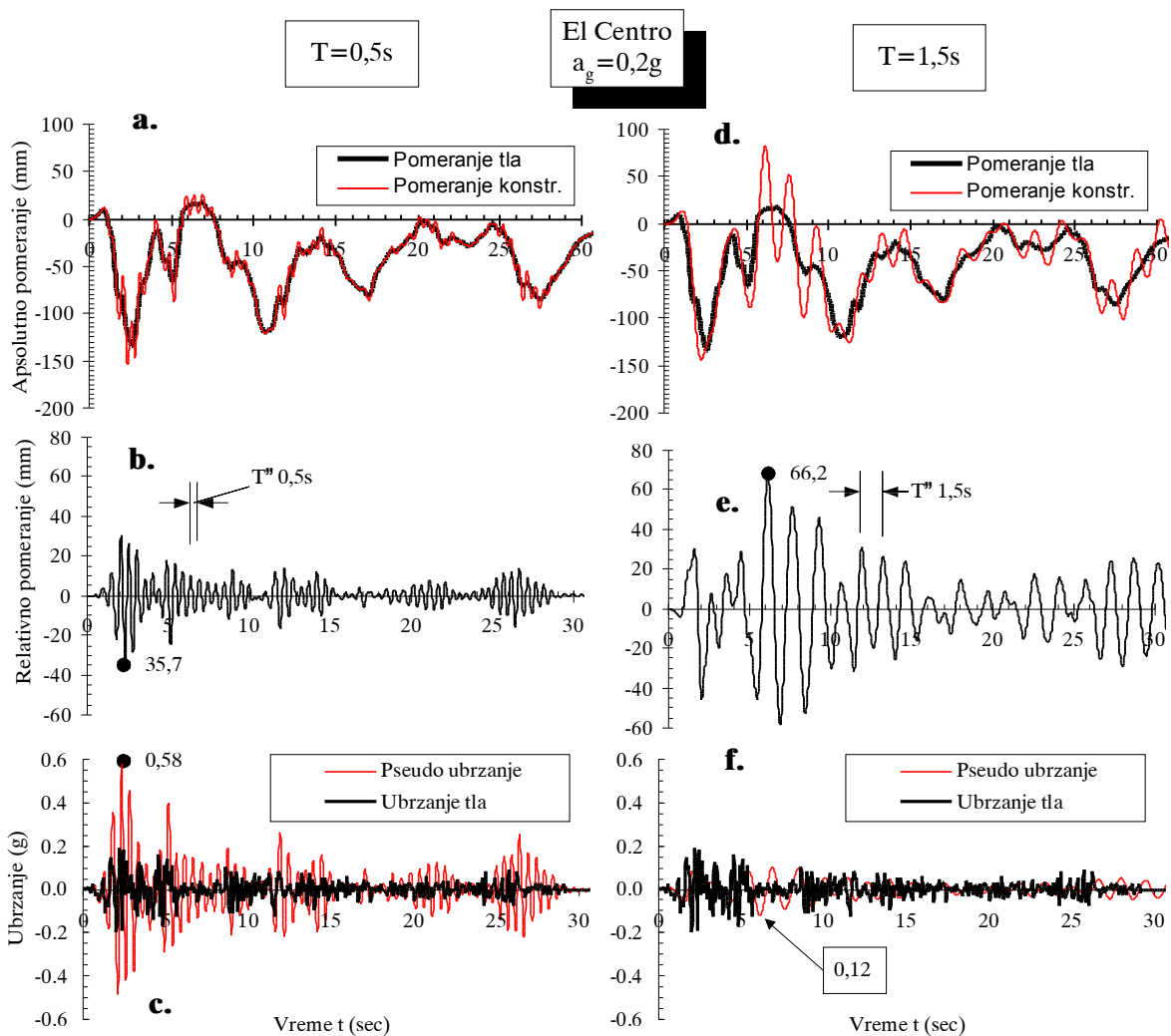
Slika 2.3 Interpretacija rezultata analize

se sve ordinate akcelerograma multiplikuju odnosom  $a_g / \max d''_g(t)$ , tako da maksimalno računsko ubrzanje tla bude jednako željenoj vrednosti  $a_g$ .

Rezultati analize se tradicionalno prikazuju u obliku sile elastičnog otpora konstrukcije  $F_k(t) = mA(t) = m\omega^2 d(t)$  - koncept "zemljotresa kao spoljnog opterećenja", slika 2.3.a. Danas je trend da se efekti zemljotresa interpretiraju kao "prinudno relativno pomeranje" konstrukcije, dok je sila  $F(t) = kd(t)$  u opštem slučaju funkcija krutosti  $k$  konstrukcije, slika 2.3.b.

U slučaju kretanja tla, rešenje jednačine (2.6) može da se odredi u obliku *Duhamel-ovog integrala*, ili se primenjuju *numeričke metode*, kao što je *Njumarkova metoda* sa konstantnim ubrzanjem [3], [4]. Ulazni podatak je promena ubrzanja tla u toku vremena  $d''_g(t)$ , definisana zapisima ubrzanja tla - akcelerogramima, slika 1.3.

Često se umesto registrovanih vrednosti ubrzanja koriste *skalirane vrednosti ubrzanja* tla. Oblik zapisa se zadržava, ali



Slika 2.4 Odgovor elastične konstrukcije na zapis El Centro

### Primer 2.1.....

Njumarkovom metodom odrediti odgovor elastične konstrukcije sa jednim stepenom slobode na uticaj zapisa El Centro prema slici 1.3.a, skaliranog na maksimalno ubrzanje tla  $a_g=0,2g$ . Analizirati dva slučaja konstrukcija, sa periodom sopstvenih oscilacija  $T=0,5s$  odnosno  $T=1,5s$ . Za vrednost koeficijenta prigušenja usvojiti  $\xi=5\%$ .

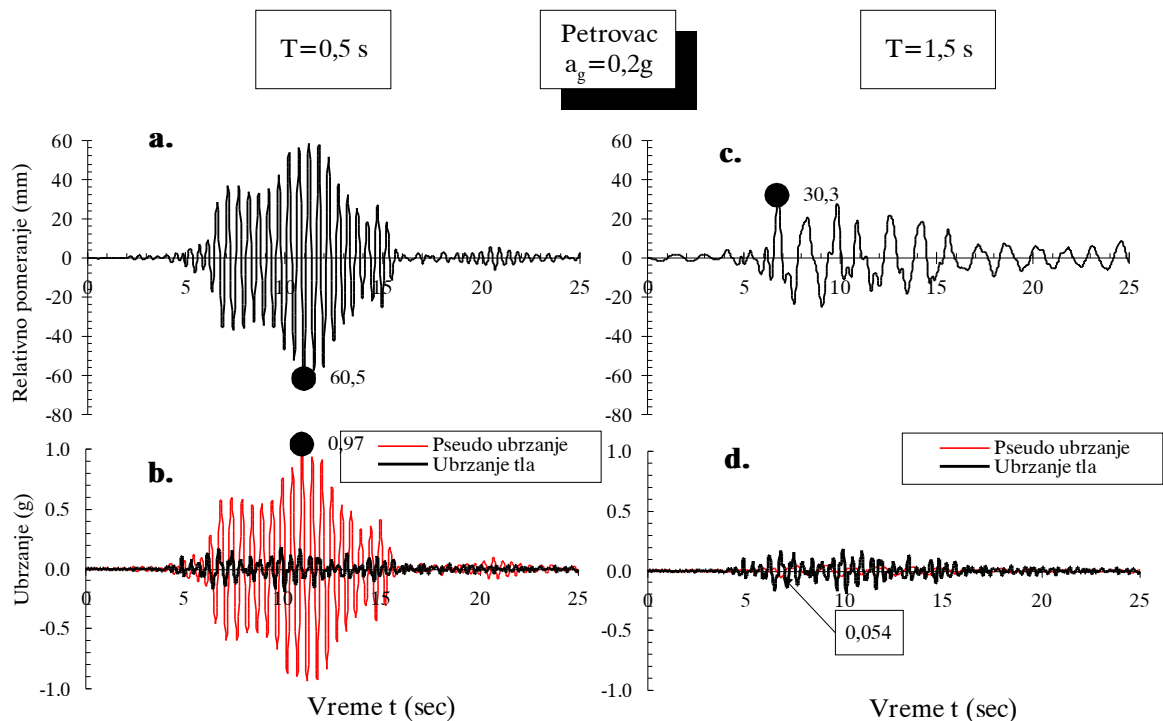
Na slici 2.4 prikazani su rezultati analize sa korakom integracije od 0,02 sekunde: ukupna - apsolutna pomeranja tla odnosno mase konstrukcije (sl.2.4.a i d), relativna pomeranja mase u odnosu na temelj (sl.2.4.b i e) kao i vrednosti ubrzanja tla odnosno pseudo ubrzanja mase konstrukcije  $A(t)/g$ , (sl.2.4.c i f).

Tlo sa sobom "nosi" konstrukciju, i nizom impulsa ubrzanja u toku vremena izaziva sopstvene oscilacije i relativna pomeranja mase. Nepravilan niz impulsa u oba slučaja izaziva oscilacije konstrukcije sa periodama praktično jednakim sopstvenim periodima oscilovanja  $T=0,5$  odnosno  $T=1,5s$ . Konstrukcija sa nižom periodom  $T=0,5s$  ima manja relativna pomeranja u odnosu na mekšu konstrukciju, što je opšti trend i za druge zapise, ali ne i pravilo.

U oba slučaja maksimalno ubrzanje tla je naravno  $0,2g$ , ali se kod krutije konstrukcije, sa nižom periodom ubrzanja mase dodatno uvećavaju, *amplifikuju* na iznos  $0,58g$ , dok je u slučaju "mekše" konstrukcije pseudo ubrzanja od  $0,12g$  manje od ubrzanja tla. Vrednost faktora *amplifikacije* - odnos maksimalnog ubrzanja konstrukcije i tla iznosi  $\beta_0 = 0,58g/0,2g = 2,9$  ( $T=0,5s$ ) odnosno  $\beta_0 = 0,12g/0,2g = 0,6$  ( $T=1,5s$ ).

### Primer 2.2.....

Njumarkovom metodom odrediti odgovor elastične konstrukcije sa jednim stepenom slobode za uticaj zapisa Petrovac prema slici 1.3.d, skaliranog na maksimalno ubrzanje tla  $a_g=0,2g$ . Analizirati dva slučaja konstrukcija, sa periodom sopstvenih oscilacija  $T=0,5s$  odnosno  $T=1,5s$ . Za vrednost koeficijenta prigušenja usvojiti  $\xi=5\%$ .



Slika 2.5 Odgovor konstrukcije na zapis Petrovac

Na slici 2.5 prikazani su rezultati analize sa korakom integracije od 0,02 sekunde: relativna pomeranja mase u odnosu na temelj (sl.2.5.a i c) kao i vrednosti ubrzanja tla odnosno pseudo ubrzanja mase konstrukcije  $A(t)/g$ , (sl.2.5.b i d).

U ovom slučaju konstrukcija sa nižom periodom ima veća relativna pomeranja. Ubrzanja kruće konstrukcije se amplifikuju 4,85 puta na iznos od čak 0,97g, dok u slučaju mekše konstrukcije, pseudo ubrzanje iznosi samo 0,054g.

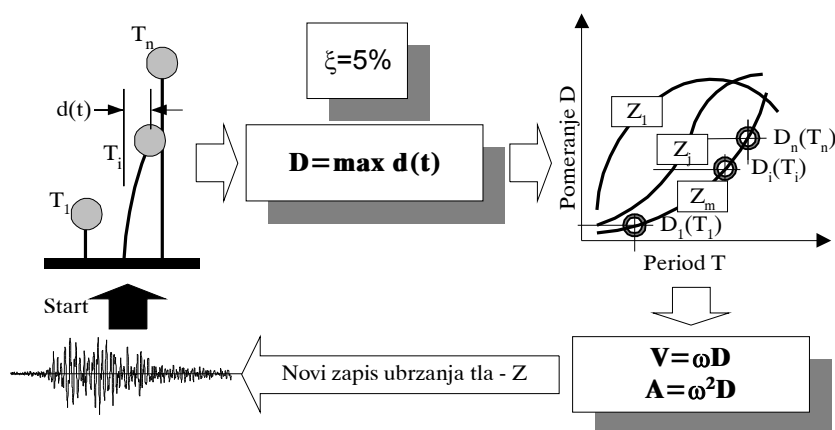
Dva navedena primera pokazuju da za odgovor konstrukcije nije bitan samo iznos maksimalnog ubrzanja tla nego i predominantni period oscilacija tla  $T_g$ , slika 1.4.c kao i *frekventne karakteristike zemljotresa* - tok promene ubrzanja u vremenu. Sa druge strane, za isti zapis, odgovor konstrukcija sa *različitim periodama* sopstvenih oscilacija se razlikuje.

## 2.2 SPEKTRI ODGOVORA ELASTIČNIH SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE KRETANJA

Za isti zapis ubrzanja tla  $d''_g(t)$ , svi elastični sistemi sa istim periodom  $T$ , odnosno kružnom frekvencom sopstvenih oscilacija  $\omega$  ( $m/k=\text{const}$ ) i prigušenjem  $\xi$  ponašaju se identično u toku trajanja zamljotresa, i dostižu iste *ekstremne vrednosti* relativnih pomeranja, relativnih brzina odnosno totalnih - pseudo ubrzanja. Ukoliko se ordinate ubrzanja tla pomnože, normalizuju faktorom  $\alpha$ , u istom odnosu promeniće se i odgovorajuće ekstremne vrednosti.

Projektante u praksi obično interesuju upravo ove ekstremne vrednosti, jer definišu maksimalno naprezanje i pomeranje konstrukcije, ali za *očekivani zemljotres* na datoj lokaciji, za koji se eventualno zna *očekivano maksimalno ubrzanje tla*  $a_g$ , ali ne i tok, frekventne karakteristike zemljotresa. Zbog toga se za analizu najčešće koriste zapisi *dogođenih zemljotresa*, ili se matematički formiraju simulacije - *sintetizovani zapisi* ubrzanja tla, skalirani na očekivano maksimalno ubrzanje tla  $a_g$ .

Postupkom prikazanim u prethodnim primerima, efekti pojedinih zapisa  $Z$  ubrzanja tla na konstrukcije sa različitim priodama  $T_i$  mogu da se sistematizuju u obliku *spektra odgovora*, koji prikazuju *maksimalni odgovor konstrukcije - pomeranje, brzinu ili ubrzanje*, čiji je algoritam prikazan na slici 2.6.



Slika 2.6 - Algoritam formiranja spektra odgovora

Za izabrani zapis  $Z$  (El Centro na primer), numeričkom integracijom sračunava se odgovor konstrukcija sa različitim periodama  $T_1 - T_n$ . Za svaku od perioda  $T_i$ , registruje se

maksimalno sračunato pomeranje sistema  $D = \max d(t)$ , na osnovu čega se formira dijagram, *spektar pomeranja*  $D(T)$  za zapis Z. Umesto sračunatih maksimalnih relativnih brzina i totalnih ubrzanja, obično se koriste *pseudo vrednosti brzina* -  $V = \omega D$  odnosno *pseudo ubrzanja*  $A = \omega^2 D$ , za koja je rečeno da su praktično jednaka *totalnim ubrzanjima* mase. Postupak se ponavlja sa novim zapisima ubrzanja tla (Petrovac na primer), čime se dobija familija spektra odgovora, koji se obično *normalizuju* ili na ubrzanje zemljine teže  $g$ , ili na maksimalno očekivano ubrzanje tla  $a_g$ .

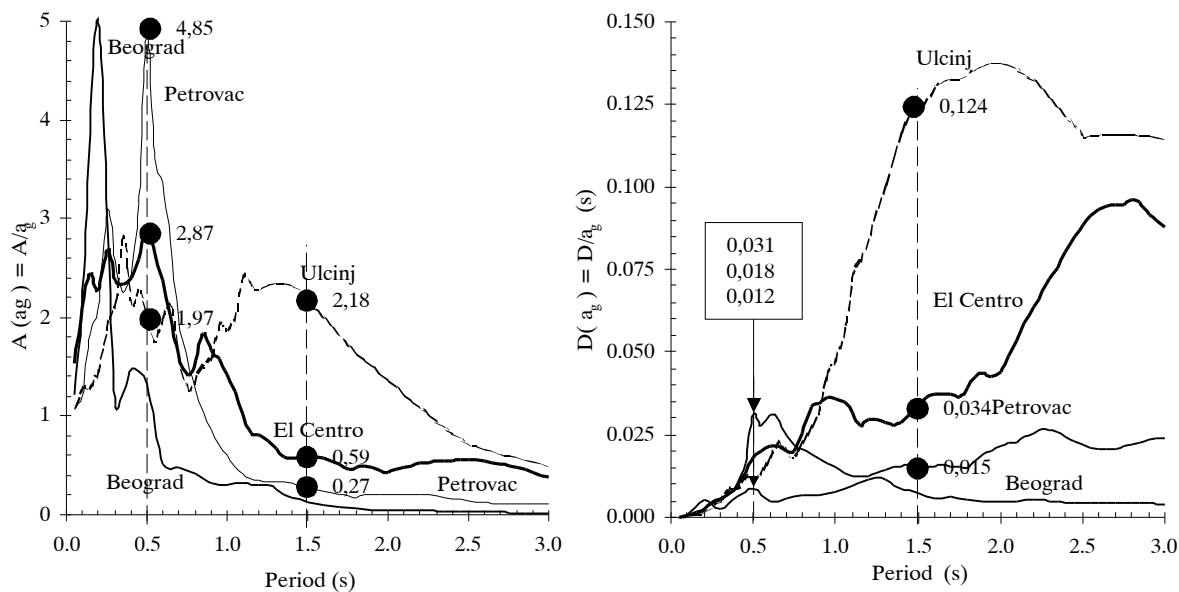
### Primer 2.3.....

Za zapise ubrzanja tla El Centro, Petrovac, Ulcinj i Beograd, formirati elastične spektre pseudo ubrzanja i relativnih pomeranja u intervalu perioda  $T=0,02 - 3,0s$ , prigušenje  $\xi=5\%$ .

Na slici 2.7 prikazani su rezultati proračuna, normalizovani na maksimalno ubrzanje tla  $a_g$ . Na dijagramima su označene i prethodno dobijene vrednosti iz primera 2.1 i 2.2.

Opšti trend je da sa produženjem perioda oscilacija konstrukcije opada vrednost *maksimalnih ubrzanja* ali i raste vrednost *maksimalnih pomeranja* konstrukcije.

Zapisi Petrovac i Ulcinj registrovani su istovremeno, pri istom zemljotresu, ali na različitim lokacijama. Razlike spektara odgovora ukazuju na značaj *lokalnih efekata tla*, koji mogu znatno da izmene frekventni sastav oscilacija tla koje potiču iz istog izvora - žarišta zemljotresa.



Slika 2.7 Spektar odgovora: a) pseudo ubrzanja i b) relativnog pomeranja elastičnog sistema

### Primer 2.4.....

Za elastičnu konstrukciju sa periodom oscilovanja  $T=1,5s$ , odrediti maksimalno relativno pomeranje i ubrzanje za efekte zemljotresa "tipa" El Centro sa maksimalnim ubrzanjem tla  $a_g = 0,2g$ .

Prema slici 2.7.b, maksimalno pomeranje iznosi

$$D = a_g D(a_g) = 0,2g \times 0,034 = 0,2 \times 9810 \times 0,034 = 66,7 \text{ mm.}$$

Prema slici 2.7.a, maksimalno ubrzanje iznosi

$$A = a_g A(a_g) = 0,2g \times 0,59 = 0,118g \quad (= \omega^2 D / g = (2\pi / 1,5)^2 \times 66,7 / 9810)$$

Za sistem sa masom  $m$ , maksimalna vrednost reakcije konstrukcije - računskog seizmičkog opterećenja  $F$  iznosi

$$F = mA = 0,118mg$$

Transverzalna sila i moment uklještenja konzole visine  $H$  iznose  $Q=F$  odnosno  $M=FH$ .

**Primer 2.5.....**

Za konzolu visine  $H=6,67m$ , sa težinom konstrukcije na vrhu  $W=300 kN$ , odrediti potreban moment inercije  $I$  stuba punog kvadratnog poprečnog preseka, tako da pri zemljotresu El Centro, sa maksimalnim ubrzanjem tla od  $a_g=0,2g$  pomeranje vrha konzole  $D$  bude jednako 1% od visine konzole  $H$ . Modulo elastičnosti beton  $E=250 GPa$ .

Masa konstrukcije iznosi

$$m = W/g = 300/9,81 = 30,58 kNs^2/m$$

Dozvoljeno pomeranje vrha konstrukcije iznosi

$$\max D = 1\%H = 0,01 \times 6,670 m = 0,0667 m \text{ odnosno}$$

$$\max D/a_g = 0,0667/0,2 \times 9,81 = 0,034 s$$

Prema slici 2.7.b, za zapis El Centro i vrednost  $D(a_g) = 0,034 s$ , sledi da konstrukcija treba da ima period oscilovanja od  $T=1,15s$ . Kako je  $T=2\pi\sqrt{(m\delta)}$ , to pomeranje vrha konzole usled statičkog dejstva jedinične sile  $\delta=1H^3/3EI$  treba da iznosi

$$\delta = (T/2\pi)^2/m = (1,5/2\pi)^2/30,58 = 1,86 \cdot 10^{-3} m \quad \text{pa je}$$

$$potI = H^3/3E\delta = 6,67^3/3 \times 2,5 \cdot 10^7 \times 1,86 \cdot 10^{-3} = 2,12 \cdot 10^{-3} m^4.$$

Potrebna dimenzija  $b$  stuba kvadratnog poprečnog preseka iznosi

$$b = (12 \times potI)^{1/4} = (12 \times 2,12 \cdot 10^{-3})^{1/4} = 0,40 m.$$