

Odrediti maksimalni ugib ploče iz primera P1, uzimajući u obzir i efekte tečenja betona. Ukoliko je dopuštena vrednost ugiba prekoračena, predložiti zadovoljavajuće rešenje.

1 PRORAČUN DEFORMACIJA POS 1

Ploča je dimenzionisana u primeru P1. Usvojena je debljina ploče $d_p = 18$ cm, u donjoj zoni je armirana armaturom RØ14/10 ($A_{a1} = 15.39$ cm²/m), dok u gornjoj zoni nije predviđena armatura ($A_{a2} = 0$). Ploča je u umereno agresivnoj sredini.

Označavanje pojedinih geometrijskih veličina koje se pojavljuju u proračunu je sprovedeno na isti način kao i u Priručniku za primenu Pravilnika BAB 87:

- oznaka **I** u eksponentu se odnosi na karakteristike neisprskalog, a oznaka **II** na karakteristike isprskalog preseka;
- oznaka **b** u indeksu označava karakteristike betonskog preseka, oznaka **a** karakteristike armature dok se oznaka **i** koristi za karakteristike idealizovanog preseka¹;
- indeks **1** se odnosi na zategnutu, a indeks **2** na pritisnutu ivicu preseka.

Uobičajeno, površine preseka se označavaju slovom **A**, momenti inercije slovom **J**, otporni momenti slovom **W** a položaji težišta preseka slovom **y**.

Potrebne geometrijske karakteristike neisprskalog betonskog preseka i položaj težišta ukupne armature u preseku dati su sledećim izrazima:

$$A_b^I = b \times d = 100 \times 18 = 1800 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$y_{b1} = y_{b2} = d/2 = 18 / 2 = 9.0 \text{ cm}$$

$$J_b^I = \frac{b \times d^3}{12} = \frac{100 \times 18^3}{12} = 48600 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$A_{a1} = 15.39 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (RØ14/10)} \quad ; \quad A_{a2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_a = A_{a1} + A_{a2} = 15.39 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Položaj težišta ukupne armature u odnosu na gornju ivicu preseka, kao i položajni moment inercije armature u odnosu na težište ukupne armature, određeni su kao:

$$y_{a2} = h = d - a_1 = 18 - (2 + 1.4/2) = 15.3 \text{ cm} \quad ; \quad J_a = 0$$

1.1 ELASTIČNO REŠENJE

Ugib u sredini raspona proste grede opterećene jednako raspodeljenim opterećenjem $q=g+p$ po čitavom rasponu, uvodeći u proračun moment inercije BRUTO BETONSKOG PRESEKA, određen je izrazom:

$$v_b = \frac{5 \times q \times l^4}{384 \times E_b \times J_b} = \frac{5 \times (6.5 + 4.0) \times 6.0^4}{384 \times 31.5 \times 10^6 \times 48600 \times 10^{-8}} = 11.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 11.6 \text{ mm}$$

1.2 PRORAČUN UGIBA U TRENUTKU NANOŠENJA OPTEREĆENJA

1.2.1 Početni ugib, ukupno opterećenje

Posebno se mora sračunati ugib za stanje I (bez prslina) i za stanje II (sa prslinama).

¹ Pod pojmom »idealizovani poprečni presek« se podrazumeva presek koji se sastoji od najmanje dva materijala, čije su mehaničke karakteristike svedene na jedan (preovlađujući) – uobičajeno beton

1.2.1.1 Stanje I (bez prslina) - ukupno opterećenje

$$n = \frac{E_a}{E_b} = \frac{210}{31.5} = 6.67$$

$$A_i^I = A_b^I + n \times A_a = 1800 + 6.67 \times 15.39 = 1903 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$y_{i2}^I = y_{b2}^I + \frac{(y_{a2} - y_{b2}^I) \times n \times A_a}{A_i^I} = 9.0 + \frac{(15.3 - 9.0) \times 6.67 \times 15.39}{1903} = 9.34 \text{ cm}$$

Moment inercije idealizovanog preseka (beton + armatura) za stanje I određen je izrazom:

$$J_i^I = J_b^I + n \times J_a + A_b^I \times (y_{a2} - y_{b2}^I) \times (y_{i2}^I - y_{b2}^I)$$

$$J_i^I = 48600 + 0 + 1800 \times (15.3 - 9.0) \times (9.34 - 9.0) = 52453 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$k_a^I = \frac{J_b^I}{J_i^I} = \frac{48600}{52453} = 0.927$$

Ugib u trenutku $t=0$ za ukupno $(g+p)$ opterećenje, za neisprskali presek (stanje I) iznosi:

$$v_0^I = k_a^I \times v_b = 0.927 \times 11.6 = 10.7 \text{ mm}$$

Da je čitav nosač bez prslina, konstantne krutosti, proračunski elastični ugib usled ukupnog, $g+p$ opterećenja, iznosio bi $v_{g+p,0} = 10.7 \text{ mm}$.

1.2.1.2 Stanje II (sa prslinama) - ukupno opterećenje

Položaj neutralne linije se određuje rešavanjem kvadratne jednačine oblika:

$$s^2 + 2n \times (\mu_1 + \mu_2) \times s - 2n \times (\mu_1 + \mu_2 \times \alpha_2) = 0$$

$$\mu_1 = \frac{A_{a1}}{b \times h} = \frac{15.39}{100 \times 15.3} = 1.01\% ; \quad \mu_2 = \frac{A_{a2}}{b \times h} = 0 ; \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{h} = 0$$

$$s^2 + 2 \times 6.67 \times 1.01 \times 10^{-2} \times s - 2 \times 6.67 \times 1.01 \times 10^{-2} = 0$$

$$s^2 + 0.134 \times s - 0.134 = 0 \Rightarrow s = 0.305$$

$$x'' = s \times h = 0.305 \times 15.3 = 4.67 \text{ cm}$$

$$A_b'' = b \times x'' = 100 \times 4.67 = 467 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$y_b'' = \frac{x''}{2} = \frac{4.67}{2} = 2.34 \text{ cm}$$

$$J_b'' = \frac{b \times (x'')^3}{12} = \frac{100 \times 4.67^3}{12} = 849 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$y_{i2}'' = x'' = 4.67 \text{ cm}$$

$$J_i'' = J_b'' + n \times J_a + A_b'' \times (y_{a2} - y_{b2}'') \times (y_{i2}'' - y_{b2}'')$$

$$J_i'' = 849 + 0 + 467 \times (15.3 - 2.34) \times (4.67 - 2.34) = 14991 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$k_a'' = \frac{J_b''}{J_i''} = \frac{849}{14991} = 0.0567$$

Ugib u trenutku $t=0$ za ukupno $(g+p)$ opterećenje, za isprskali presek (stanje II) iznosi:

$$v_0'' = k_a'' \times v_b = 0.0567 \times 11.6 = 0.658 \text{ mm}$$

Da je čitav nosač isprskao, konstantne krutosti koja odgovara preseku u sredini raspona, proračunski elastični ugib usled ukupnog, $g+p$ opterećenja, iznosio bi $v_{g+p,0} = 37.5$ mm.

1.2.1.3 Početni ugib u trenutku $t=0$ (ukupno opterećenje)

Pošto je ploča pod opterećenjem $g+p$ na jednom delu (u blizini oslonaca) u stanju bez prslina, dok je u središnjem delu u isprskalom stanju, potrebno je vrednosti ugiba sračunate u tačkama 1.2.1.1 i 1.2.1.2, koje predstavljaju donju odnosno gornju vrednost koja se može javiti, na određeni način ponderisati (ovde: bilinearna metoda). Najpre je potrebno sračunati moment pojave prslina M_r :

$$W'_{i1} = \frac{J'_i}{y'_{i1}} = \frac{J'_i}{d - y'_{i2}} = \frac{52453}{18 - 9.34} = 6057 \frac{\text{cm}^3}{\text{m}}$$

$$MB 30 \Rightarrow f_{bzm} = 2.4 \text{ MPa (član 51 PBAB 87)}$$

$$f_{bzs} = f_{bzm} \times \left(0.6 + \frac{0.4}{\sqrt[4]{d}} \right) = 2.40 \times \left(0.6 + \frac{0.4}{\sqrt[4]{0.18}} \right) = 2.91 \text{ MPa} = 0.291 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$M_r = M_r = f_{bzs} \times W'_{i1} = 0.291 \times 6057 \times 10^{-2} = 17.6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} < M_g + M_p = 47.25 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = 1.0 \text{ (RA 400/500)} \\ \beta_2 = 1.0 \text{ (} t = 0 \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \zeta_{0,g+p} = 1 - 1.0 \times 1.0 \times \frac{17.6}{47.25} = 0.626$$

Ukupno, početni ugib u trenutku $t=0$ se dobija iz izraza:

$$v_0 = (1 - \zeta) \times v_0' + \zeta \times v_0''$$

$$v_{g+p,0} = (1 - 0.626) \times 10.7 + 0.626 \times 37.5 = 27.5 \text{ mm}$$

Maksimalni ugib grede usled ukupnog, stalnog i povremenog opterećenja, u trenutku nanošenja opterećenja ($t=0$), je $v_{g+p,0} = 27.5$ mm.

Da je opterećenje koje deluje na konstrukciju kratkotrajno (što je slučaj sa povremenim opterećenjem), odnosno kada beton ne bi pokazivao svojstva tečenja i skupljanja, sračunata vrednost ugiba bi bila konačna. Ovako, potrebno je zasebno proračunati trenutni ugib usled stalnog opterećenja i njegov priraštaj u toku vremena.

1.2.2 Početni ugib, stalno opterećenje

Krutost, odnosno moment inercije, bilo u neisprskalom (J'_i) ili isprskalom (J''_i) stanju, je funkcija dimenzija poprečnog preseka i količine i položaja armature u preseku, nezavisno od intenziteta opterećenja. Stoga se deformacije usled stalnog opterećenja lako dobijaju iz proporcije:

1.2.2.1 Stanje I (bez prslina) - stalno opterećenje

$$v'_{g,0} = \frac{g}{g+p} \times v'_{g+p,0} = \frac{6.5}{6.5+4.0} \times 10.7 = 6.6 \text{ mm}$$

1.2.2.2 Stanje II (sa prslinama) - stalno opterećenje

$$v''_{g,0} = \frac{g}{g+p} \times v''_{g+p,0} = \frac{6.5}{6.5+4.0} \times 37.5 = 23.2 \text{ mm}$$

1.2.2.3 Početni ugib u trenutku $t=0$ (stalno opterećenje)

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = 1.0 \text{ (RA 400/500)} \\ \beta_2 = 1.0 \text{ (} t = 0 \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \zeta_{0,g} = 1 - 1.0 \times 1.0 \times \frac{17.6}{29.25} = 0.397$$

$$v_{g,0} = (1 - 0.397) \times 6.6 + 0.397 \times 23.2 = 13.2 \text{ mm}$$

1.3 PRORAČUN UGIBA U TOKU VREMENA

Geometrijske karakteristike idealizovanog poprečnog preseka (beton+armatura) se sračunavaju na isti način kao za stanje $t=0$, s tim da se u odgovarajuće izraze umesto modula deformacije betona E_b unosi korigovani efektivni modul E_b^* .

$$\left. \begin{array}{l} \chi_\infty = 0.8 \\ \varphi_\infty = 2.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_\infty \times \varphi_\infty = 0.8 \times 2.5 = 2.0$$

$$E_b^* = \frac{E_b}{1 + \chi_\infty \varphi_\infty} = \frac{31.5}{1 + 2.0} = 10.5 \text{ GPa} \Rightarrow n^* = \frac{E_a}{E_b^*} = \frac{210}{10.5} = 20$$

1.3.1 Trajni ugib, stalno opterećenje

1.3.1.1 Stanje I (bez prslina) - stalno opterećenje

$$A_i^{*I} = A_b^I + n^* \times A_a = 1800 + 20 \times 15.39 = 2108 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$y_{i2}^{*I} = y_{b2}^I + \frac{(y_{a2} - y_{b2}^I) \times n^* \times A_a}{A_i^{*I}} = 9.0 + \frac{(15.3 - 9.0) \times 20 \times 15.39}{2108} = 9.92 \text{ cm}$$

Moment inercije idealizovanog preseka (beton + armatura) za stanje I određen je izrazom:

$$J_i^{*I} = J_b^I + n^* \times J_a + A_b^I \times (y_{a2} - y_{b2}^I) \times (y_{i2}^{*I} - y_{b2}^I)$$

$$J_i^{*I} = 48600 + 0 + 1800 \times (15.3 - 9.0) \times (9.92 - 9.0) = 59035 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$k_\varphi^I = 1 - \frac{n^*}{J_i^{*I}} \times [J_a + A_a \times (y_{a2} - y_{i2}^I) \times (y_{a2} - y_{i2}^{*I})]$$

$$k_\varphi^I = 1 - \frac{20}{59035} \times [0 + 15.39 \times (15.3 - 9.34) \times (15.3 - 9.92)] = 0.833$$

$$v_{\infty,g}^I = k_\varphi^I \times (1 + k_\varphi^I \times \varphi_\infty) \times v_{b,g}^I = (1 + k_\varphi^I \times \varphi_\infty) \times v_{0,g}^I$$

Ugib u vremenu $t \rightarrow \infty$ usled stalnog opterećenja, za neisprskali presek (stanje I) iznosi:

$$v_{g,\infty}^I = (1 + 0.833 \times 2.5) \times 6.6 = 20.5 \text{ mm}$$

1.3.1.2 Stanje II (sa prslinama) - stalno opterećenje

$$A_i^{*II} = A_b^{II} + n^* \times A_a = 467 + 20 \times 15.39 = 775 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$y_{i2}^{*II} = y_{b2}^{II} + \frac{(y_{a2} - y_{b2}^{II}) \times n^* \times A_a}{A_i^{*II}} = 2.34 + \frac{(15.3 - 2.34) \times 20 \times 15.39}{775} = 7.49 \text{ cm}$$

$$J_i^{*II} = J_b^{II} + n^* \times J_a + A_b^{II} \times (y_{a2} - y_{b2}^{II}) \times (y_{i2}^{*II} - y_{b2}^{II})$$

$$J_i^{*II} = 849 + 0 + 467 \times (15.3 - 2.34) \times (7.49 - 2.34) = 32039 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$k_\varphi^{II} = 1 - \frac{n^*}{J_i^{*II}} \times [J_a + A_a \times (y_{a2} - y_{i2}^{II}) \times (y_{a2} - y_{i2}^{*II})]$$

$$k_{\varphi}'' = 1 - \frac{20}{32039} \times [0 + 15.39 \times (15.3 - 4.67) \times (15.3 - 7.49)] = 0.202$$

$$v_{\infty, g}'' = k_a'' \times (1 + k_{\varphi}'' \times \varphi_{\infty}) \times v_{b, g} = (1 + k_{\varphi}'' \times \varphi_{\infty}) \times v_{0, g}''$$

Ugib u vremenu $t \rightarrow \infty$ usled stalnog opterećenja, za isprskali presek (stanje II) iznosi:

$$v_{g, \infty}'' = (1 + 0.202 \times 2.5) \times 23.2 = 35.0 \text{ mm}$$

1.3.2 Trajni ugib u trenutku $t \rightarrow \infty$ (stalno opterećenje)

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = 1.0 \text{ (RA 400/500)} \\ \beta_2 = 0.5 \text{ (} t \rightarrow \infty \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \zeta_{\infty, g} = 1 - 1.0 \times 0.5 \times \frac{17.6}{29.25} = 0.698$$

$$v_{g, \infty} = (1 - 0.698) \times 20.5 + 0.698 \times 35.0 = 30.6 \text{ mm}$$

1.3.3 Trajni ugib, ukupno opterećenje

Konačna vrednost ugiba usled dejstva dugotrajnog (stalnog) i kratkotrajnog (povremenog) opterećenja dobija se kao trenutna vrednost ugiba od ukupnog opterećenja, uvećana za prirast ugiba kao posledice dugotrajnog dejstva stalnog opterećenja:

$$v_{g+p, \infty} = v_{g+p, 0} + (v_{g, \infty} - v_{g, 0})$$

$$v_{g+p, \infty} = v_{\max} = 27.5 + (30.6 - 13.2) = 44.9 \text{ mm}$$

$$v_{g+p, \infty} = v_{\max} = 4.49 \text{ cm} > v_{dop.} = \frac{L}{300} = \frac{600}{300} = 2 \text{ cm}$$

Kako je prekoračen dopušteni ugib, definisan članom 117. Pravilnika BAB 87, potrebno je korigovati neki od parametara.

$$v_b = 11.6 \text{ mm} \quad - \text{ elastično rešenje, bruto betonski presek}$$

$$v_{g+p, 0} = 27.5 \text{ mm} \quad - \text{ trenutni ugib, ukupno opterećenje, } t=0$$

$$v_{g+p, \infty} = 44.9 \text{ mm} \quad - \text{ trajni ugib, ukupno opterećenje, } t \rightarrow \infty$$

Kako je dopuštena vrednost ugiba znatno prekoračena, trebalo bi debljinu ploče povećati minimalno $\sqrt[3]{44.9/20} = 1.31$ puta, što daje $d_p = 1.31 \times 18 = 24 \text{ cm}$. Međutim, povećanje debljine ploče sa 18 na 24 cm povećava i intenzitet stalnog opterećenja za 1.5 kN/m^2 , što dodatno povećava računski ugib. Istovremeno, veća dimenzija ploče zahteva manju količinu zategnute armature, čime se dodatno povećava koeficijent k_a'' koji uvodi u proračun uticaj isprskalosti preseka (smanjuje se A_{a1} , povećava h - po oba osnova povećava se k_a''). Stoga dimenzija od 24 cm sigurno neće biti dovoljna bez usvajanja dosta veće količine armature od potrebne za zadovoljenje graničnog stanja nosivosti.

Rezultati varijantnih proračuna su prikazani tabelarno, radi lakšeg poređenja. Najpre je ploča podebljana na 24 cm, uz usvajanje armature potrebne prema graničnom stanju nosivosti (očekivano, dopušteni ugib je prekoračen). Zatim je za istu debljinu ploče usvojena nešto veća količina armature, dovoljna da se ugib nađe u dopuštenim granicama. Na kraju, ploča je podebljana na potrebnih 28 cm, uz usvajanje armature potrebne prema graničnom stanju nosivosti. **Kao definitivna je usvojena je treća varijanta** (ploča 24 cm, armatura RØ16/10, osenčena kolona u tabeli na sledećoj strani).

Naravno, umesto ovde sprovedenog proračuna geometrijskih karakteristika idealizovanih preseka u neisprskalom odnosno isprskalom stanju, mogu se koristiti i odgovarajući dijagrami (Priručnik za primenu Pravilnika BAB 87, Tom II, Prilog 3.4: »Koeficijenti za proračun krivine elementa pravougaonog preseka izloženih složenom savijanju«). Sa ovih dijagrama

se, u funkciji procenta armiranja zategnutom armaturom, očitavaju vrednosti koeficijenata k_a^I , k_a^{II} , k_φ^I i k_φ^{II} , za čije se proračunavanje troši najviše vremena. Kod određivanja uticaja tečenja, dijagrami su konstruisani za mlade ($\chi_\infty \times \varphi_\infty = 3$), stare ($\chi_\infty \times \varphi_\infty = 1$) i betone ume-rene starosti u trenutku nanošenja opterećenja ($\chi_\infty \times \varphi_\infty = 2$).

Ukoliko se koriste dijagrami za proračun koeficijenata, nije potrebno sračunavati moment inercije idealizovanog poprečnog preseka J_i^I i odgovarajući otporni moment W_{i1}^I već mo-ment pojave prsline M_r treba sračunati sa vrednošću otpornog momenta W_{b1} .

d_p	cm	18	24	24	28	
g	kN/m ²	6.5	8	8	9	
p	kN/m ²	4	4	4	4	
M_g	kNm/m	29.25	36	36	40.5	
M_p	kNm/m	18	18	18	18	
M_u	kNm/m	79.2	90	90	97.2	
h	cm	15.3	21.4	21.2	25.4	
$A_{a,potr.}$	cm ² /m	14.38	11.17	11.28	10.06	
$A_{a,usv.}$	\emptyset/e_a	$\emptyset 14/10$	$\emptyset 12/10$	$\emptyset 16/10$	$\emptyset 12/10$	
	cm ² /m	15.39	11.31	20.11	11.31	
J_b^I	cm ⁴ /m	48600	115200	115200	182933	
$v_{b,g+p}$	mm	11.57	5.58	5.58	3.81	
$g+p, t=0$	J_i^I	cm ⁴ /m	52453	121659	125945	192475
	k_a^I	–	0.927	0.947	0.915	0.95
	$v_{g+p,0}^I$	mm	10.72	5.28	5.10	3.62
	J_i^{II}	cm ⁴ /m	14991	24445	38093	35404
	k_a^{II}	–	3.242	4.713	3.024	5.167
	$v_{g+p,0}^{II}$	mm	37.52	26.30	16.88	19.67
	M_r	kNm/m	17.6	29.2	30.8	38.8
	$\zeta_{0,g+p}$	–	0.626	0.459	0.43	0.337
	$v_{g+p,0}$	mm	27.51	14.93	10.17	9.03
$g, t=0$	$v_{g,0}^I$	mm	6.64	3.52	3.40	2.50
	$v_{g,0}^{II}$	mm	23.23	17.53	11.25	13.62
	$\zeta_{0,g}$	–	0.397	0.189	0.146	0.043
	$v_{g,0}$	mm	13.22	6.17	4.55	2.98
$g, t \rightarrow \infty$	J_i^{*I}	cm ⁴ /m	59035	133465	144351	210132
	k_φ^I	–	0.833	0.867	0.809	0.874
	$v_{g,t}^I$	mm	20.46	11.16	10.28	7.98
	J_i^{*II}	cm ⁴ /m	32039	56646	82078	83584
	k_φ^{II}	–	0.202	0.147	0.196	0.135
	$v_{g,t}^{II}$	mm	34.95	23.99	16.77	18.23
	$\zeta_{t,g}$	–	0.698	0.594	0.573	0.521
	$v_{g,t}$	mm	30.58	18.79	14.00	13.32
$v_{g+p,t}$	mm	44.87	27.55	19.62	19.37	