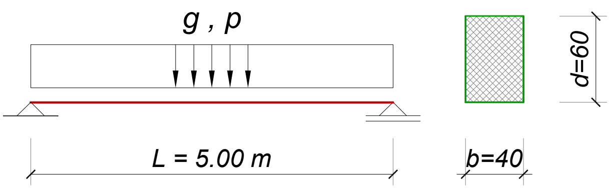
P1. *Dimenzionisati gredni nosač opterećen jednako raspodeljenim stalnim (g = 24 kN/m) i povremenim (p = 32 kN/m) opterećenjem. Poprečni presek je pravougaoni, dimenzija b/d = 40/60 cm. Kvalitet materijala: MB 30, RA 400/500.*



$$\left.\begin{aligned} M_g &= 24\times 5.0^2/8 = 75\,kNm \\ M_p &= 32\times 5.0^2/8 = 100\,kNm \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_u = 1.6\times 75 + 1.8\times 100 = 300\ kNm$$

MB 30 ⇒ f_B = 20.5 MPa = 2.05 kN/cm^2 (član 82. Pravilnika BAB 87)

Ra 400/500 ⇒ σ_v = 400 MPa = 40 kN/cm^2

pretp. a_1 = 7 cm ⇒ h = 60 - 7 = 53 cm

$$k = \frac{53}{\sqrt{\dfrac{300\times 10^2}{40\times 2.05}}} = 2.771 \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon_b/\varepsilon_a = 2.425/10‰ \\ \bar{\mu} = 14.152\% \end{array}$$

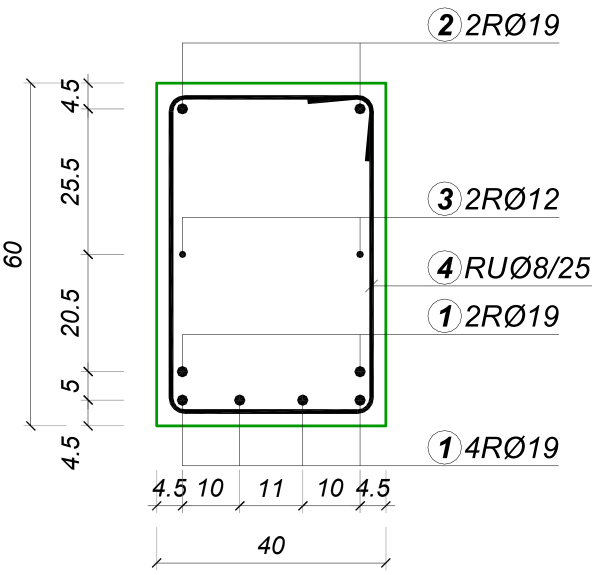
ε_a	ε_b	s	α	η	ζ	μ_{1M} %	k
10	2.450	0.197	0.728	0.389	0.923	14.324	2.750
10	**2.425**	**0.195**	**0.725**	**0.389**	**0.924**	**14.152**	**2.765**
10	2.400	0.194	0.722	0.388	0.925	13.978	2.781

$$A_a = \bar{\mu}\times\frac{b\times h}{100}\times\frac{f_B}{\sigma_v} = 14.152\times\frac{40\times 53}{100}\times\frac{2.05}{40}$$

A_a = 15.38 cm^2 ili:

$$A_a = \frac{M_u}{\zeta\times h\times\sigma_v} = \frac{300\times 10^2}{0.924\times 53\times 40} = 15.31\ cm^2$$

usvojeno: **6RØ19** (17.01 cm^2)



$$a^I = a_0 + Ø_u + \frac{Ø}{2} = 2.5 + 0.8 + \frac{1.9}{2} = 4.25\ cm$$

usv. a^I = 4.5 cm

$$a^{II} = a^{II} + e_{v0} + 2\times\frac{Ø}{2} = 4.5 + 3 + 1.9 = 9.4\ cm$$

usv. a^{II} = 9.5 cm ⇒ $a_1 = \dfrac{4\times 4.5 + 2\times 9.5}{6}$ = 6.17 cm

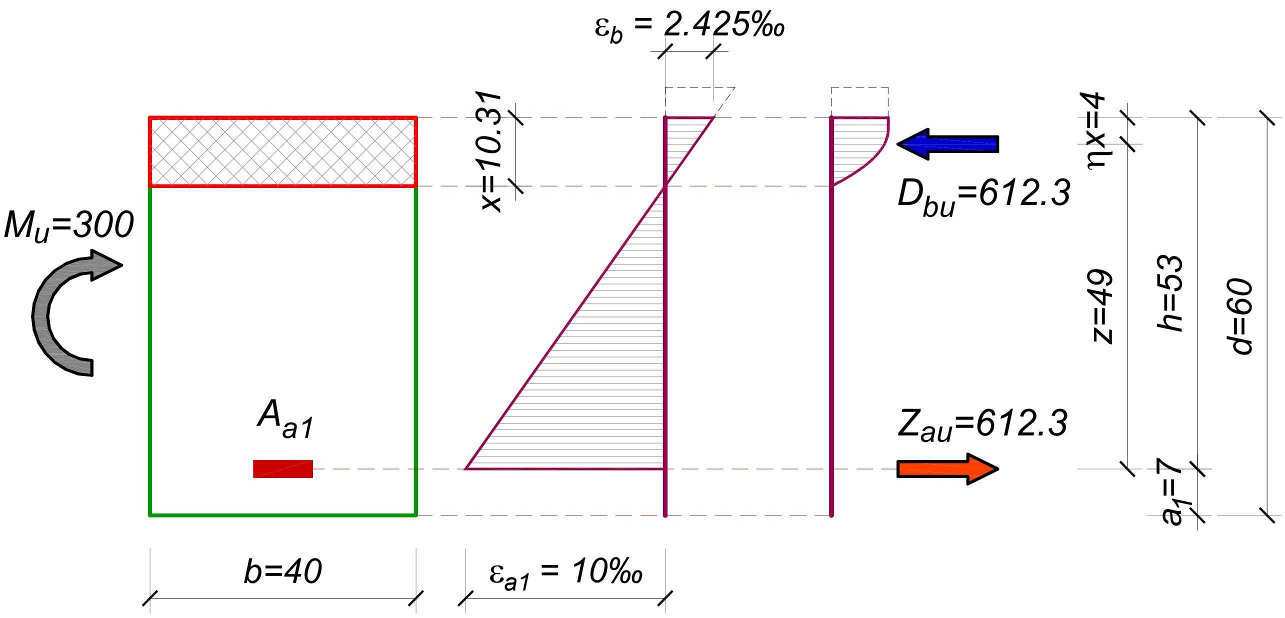
$h_{stv.}$ = 60 – 6.17 = 53.83 cm > h_{pretp} = 53 cm

Usvajanjem dimenzija preseka i armature postupak dimenzionisanja je završen. Usvojena je količina armature veća od potrebne, uz obezbeđivanje računski potrebne statičke visine.

Postupak dimenzionisanja, odnosno određivanja potrebne površine armature, zapravo se sprovodi u dva koraka:

- *iz uslova ravnoteže momenata savijanja određuje se položaj neutralne linije u preseku. Korišćenjem tablica, očitava se koeficijent* ***k****, a zapravo se utvrđuje položaj neutralne linije očitavanjem koeficijenta* ***s****, odnosno određuje sila pritiska u betonu;*

- *iz uslova ravnoteže normalnih sila odredi se sila u zategnutoj armaturi, odnosno potrebna površina armature*



Pomoću tabulisanih vrednosti lako je sračunati unutrašnje sile u preseku i njihove tačne položaje. Sledi:

$$D_{bu}=\alpha\cdot s\cdot b\cdot h\cdot f_B = 0.725\times0.195\times40\times53\times2.05 = 612.3\ kN$$

$x=s\cdot h = 0.195\times53 = 10.31\ cm$ - *visina pritisnute zone preseka*

$\eta\cdot x = 0.389\times10.31 = 4.0\ cm$ - *rastojanje sile D_{bu} od pritisnute ivice preseka*

$z=\zeta\cdot h = 0.924\times53 = 49.0\ cm$ - *krak unutrašnjih sila*

$$\sigma_{a1}=\varepsilon_{a1}\times E_a\le\sigma_v$$

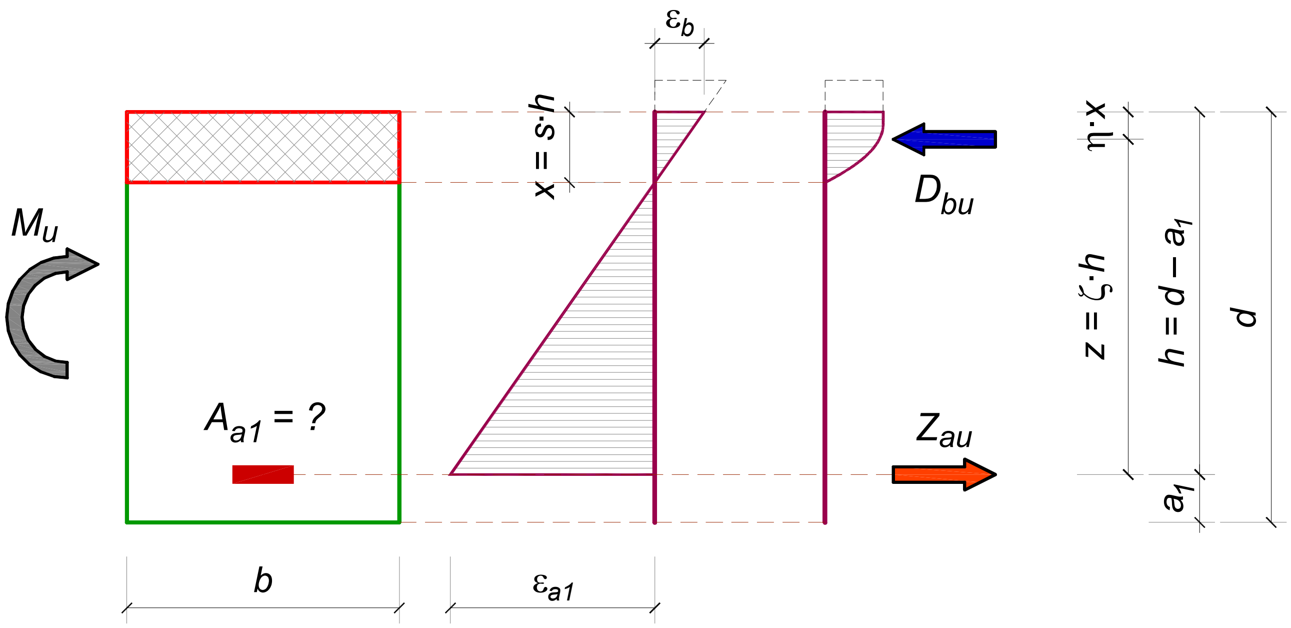
$$\varepsilon_{a1}=10‰>\varepsilon_v=\frac{\sigma_v}{E_a}=\frac{400}{210\times10^3}=1.905‰\ \Rightarrow\ \sigma_{a1}=\sigma_v = 400\ MPa = 40\ kN/cm^2$$

$$Z_{au}=A_a\times\sigma_{a1}=A_a\times\sigma_v = 15.31\times40 = 612.3\ kN$$

Izloženi postupak (tzv. »vezano dimenzionisanje«) je lako sprovesti ukoliko postoje odgovarajuće tablice za proračun. Međutim, one su izrađene isključivo za pravougaoni poprečni presek i vezu napon-dilatacija definisanu važećim Pravilnikom BAB 87.

Šta ako tablica nema? Odnosno, ako se propisi promene? »Iz uslova ravnoteže momenata savijanja određuje se položaj neutralne linije u preseku«. Da pokušamo:

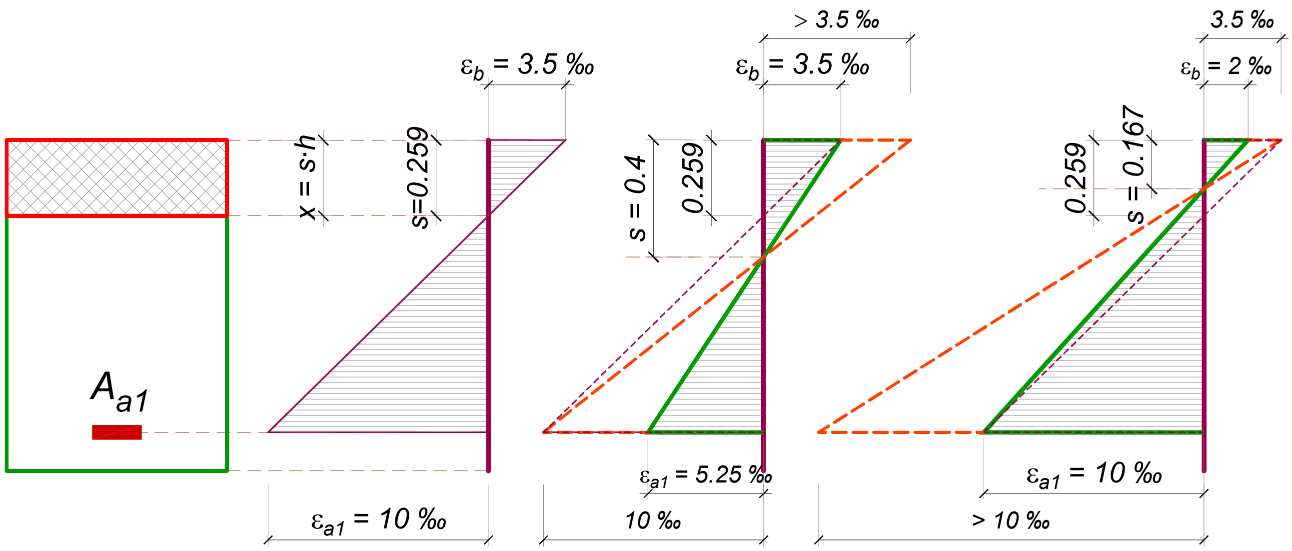
Pod dejstvom spoljašnjeg momenta savijanja M_u presek se deformiše. Dijagram dilatacija predstavlja deformisani oblik preseka. Presek ostaje prav i upravan na deformisanu osu nosača (Bernoulli-eva hipoteza ravnih preseka) – dijagram dilatacija je pravolinijski.



Na presek ne deluje nikakva spoljašnja aksijalna sila, pa unutrašnje sile moraju biti uravnotežene. Jedna je pritisak (D_{bu} - beton) a druga zatezanje (Z_{au} - armatura). Neutralna linija (mesto gde je dilatacija jednaka nuli) se mora nalaziti između ove dve sile različitog znaka, dakle u poprečnom preseku. Međutim, od svih mogućih položaja neutralne linije u preseku, pravi je onaj za koji je zadovoljen i uslov loma:

- *lom po pritisnutom betonu, u slučaju da je dostignuta dilatacija ε_b = 3.5‰, ili*
- *lom po zategnutoj armaturi, u slučaju da je dostignuta dilatacija ε_{a1} = 10‰, ili*
- *simultani lom (istovremeno dostizanje graničnih dilatacija oba materijala)*

Dakle, dilatacije ε_b, ε_a i položaj neutralne linije (visina pritisnute zone ***x****, odnosno bezdimenziona* ***s****) zapravo predstavljaju JEDNU nepoznatu veličinu. Kao nepoznata se obično bira koeficijent položaja neutralne linije, dok se dilatacije sračunavaju.*



Lako je pokazati da je izborom veličine ***s*** *jednoznačno određen par dilatacija ε_b, ε_{a1} pri čemu makar jedna dostiže graničnu vrednost.*

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_b = 3.5‰ \\ \varepsilon_{a1} = 10‰\end{matrix}\right\} \Rightarrow s = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{a1}} = \frac{3.5}{3.5+10} = \frac{7}{27} = 0.259$$

*Ukoliko je vrednost **s** veća od vrednosti koja odgovara simultanom lomu (dijagram u sredini), moguća stanja dilatacija su:*

- *lom po armaturi (ε_{a1} = 10‰, crvena isprekidana linija) – u ovom slučaju dilatacija ε_b bi prekoračila graničnu vrednost od 3.5‰, odnosno bio bi narušen uslov loma;*
- *lom po betonu (ε_b = 3.5‰, zelena puna linija,), dok se ε_{a1} određuje kao:*

$$\boxed{s \ge \frac{7}{27} = 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_b = 3.5‰ \;\; ; \;\; \varepsilon_{a1} = \frac{1-s}{s}\times\varepsilon_b = \frac{1-s}{s}\times 3.5‰}$$

Dakle, oba pretpostavljena stanja dilatacija zadovoljavaju Bernoulli-evu hipotezu ali samo drugo zadovoljava i uslov loma, pa predstavlja traženo rešenje.

*Nasuprot tome, ukoliko je vrednost **s** manja od vrednosti koja odgovara simultanom lomu (desni dijagram), moguća stanja dilatacija su:*

- *lom po betonu (ε_b = 3.5‰, crvena isprekidana linija) – u ovom slučaju dilatacija ε_{a1} bi prekoračila graničnu vrednost od 10‰, odnosno bio bi narušen uslov loma;*
- *lom po armaturi (ε_{a1} = 10‰, zelena puna linija,), dok se ε_b određuje kao:*

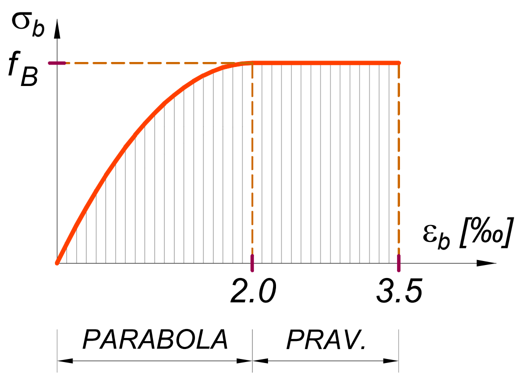
$$\boxed{s \le \frac{7}{27} = 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{a1} = 10‰ \;\; ; \;\; \varepsilon_b = \frac{s}{1-s}\times\varepsilon_{a1} = \frac{s}{1-s}\times 10‰}$$

I u ovom slučaju oba pretpostavljena stanja dilatacija zadovoljavaju Bernoulli-evu hipotezu ali samo drugo zadovoljava i uslov loma, pa predstavlja traženo rešenje.

*Pored ovoga, potrebno je da budu zadovoljeni i **uslovi ravnoteže**. Lako je pokazati da su, za poznat položaj neutralne linije i usvojen kvalitet materijala, jednoznačno određeni unutrašnja sila pritiska u betonu D_{bu} i njen položaj.*

Za proizvoljan presek sa jednom osom simetrije sila pritiska u betonu je određena izrazom:

$$\boxed{D_{bu} = \int_{y=0}^{y=x} \sigma_b(y)\, b(y)\, dy}$$



U slučaju pravougaonog poprečnog preseka, širina je konstantna, pa se prethodni izraz značajno pojednostavljuje:

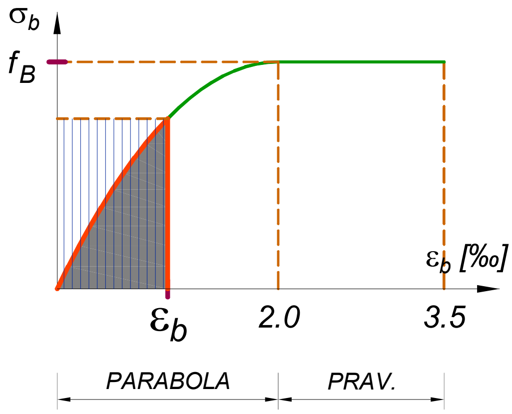
$$b = const. \Rightarrow D_{bu} = b\int_{y=0}^{y=x} \sigma_b(y)\, dy$$

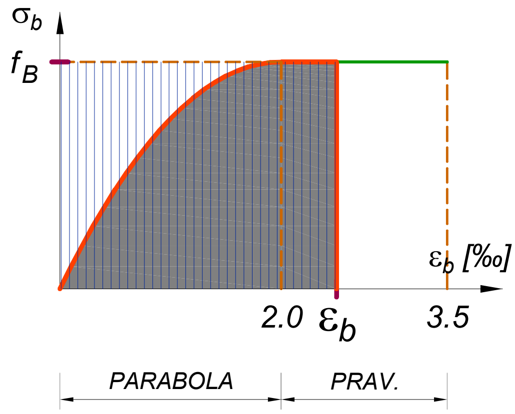
odnosno sila D_{bu} se dobija kada se površina dijagrama napona u betonu pomnoži širinom poprečnog preseka, što je moguće napisati u obliku:

$$\boxed{D_{bu} = \alpha \cdot b \cdot x \cdot f_B = \alpha \cdot s \cdot b \cdot h \cdot f_B}$$

Vrednosti koeficijenta punoće dijagrama napona pritiska u betonu α su date u tabelama za dimenzionisanje pravougaonih preseka. Za Pravilnikom BAB 87 definisan radni dijagram betona (parabola+pravougaonik) se mogu sračunati kao:

$$\boxed{\alpha = \frac{\varepsilon_b}{12} \times (6 - \varepsilon_b)} \quad (za \quad \varepsilon_b \le 2‰) \quad ; \quad \boxed{\alpha = \frac{3\varepsilon_b - 2}{3\varepsilon_b}} \quad (za \quad 2‰ \le \varepsilon_b \le 3.5‰)$$





a u geometrijskom smislu predstavljaju odnos osenčene i šrafirane površine dijagrama.

Sila D_{bu} deluje u težištu naponskog dijagrama. Bezdimenzioni koeficijenti koji određuju njen položaj u odnosu na krajnju pritisnutu ivicu preseka su određeni izrazima:

$$\boxed{\eta = \frac{8 - \varepsilon_b}{4 \times (6 - \varepsilon_b)}} \quad (za \quad \varepsilon_b \le 2‰) \quad ; \quad \boxed{\eta = \frac{\varepsilon_b \times (3\varepsilon_b - 4) + 2}{2\varepsilon_b \times (3\varepsilon_b - 2)}} \quad (za \quad 2‰ \le \varepsilon_b \le 3.5‰)$$

*Kako je dilatacija ε_b određena za poznat položaj neutralne linije (**s**), time je jednoznačno određena i sila D_{bu} i njen položaj u odnosu na pritisnutu ivicu preseka $\eta \cdot x$, odnosno krak unutrašnjih sila **z**:*

$$z = h - \eta \cdot x = h - \eta \cdot s \cdot h = h \times (1 - \eta \cdot s) = \zeta \cdot h$$

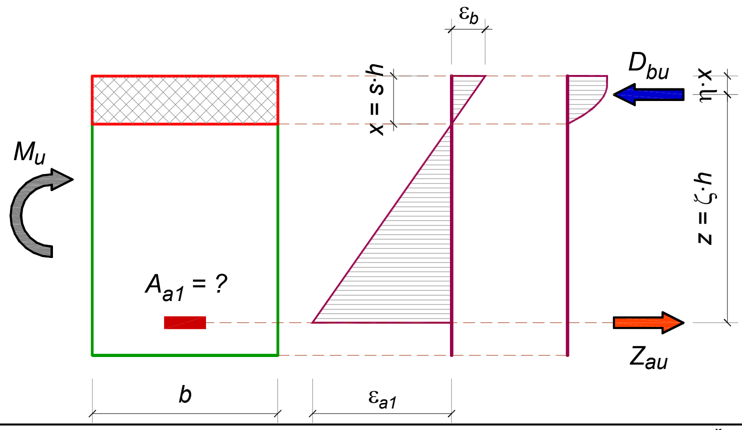
*Za proizvoljno odabrani položaj neutralne linije (veličina **s**), iz Bernoulli-eve hipoteze i uslova loma sračunavaju se dilatacije ε_b i ε_{a1}. Iz poznate veze napon-dilatacija (RDB) sračunava se unutrašnja sila D_{bu} i njen položaj, odnosno krak unutrašnjih sila **z**.*

*Naravno da **s** nije moguće proizvoljno izabrati, jer je, pored dosad zadovoljenih uslova, neophodno zadovoljiti i uslove ravnoteže. U slučaju dimenzionisanja, poznati su statički uticaji koji deluju na presek (moment savijanja M_u) pa se nepoznati položaj neutralne linije određuje iz uslova ravnoteže momenata savijanja.*

Uslov ravnoteže momenata savijanja se ispisuje u odnosu na težište zategnute armature, kako bi se eliminisala nepoznata sila Z_{au} (nepoznata je površina armature). Sledi:

$$\boxed{\sum M_a = 0: \quad D_{bu} \times z = M_u}$$

$$\alpha \cdot s \cdot b \cdot h \cdot f_B \times \zeta \cdot h = M_u$$



$$\alpha \cdot s \cdot \zeta \cdot b \cdot h^2 \cdot f_B = M_u \;\Rightarrow\; \alpha \cdot s \cdot \zeta = \frac{1}{k^2} = \frac{M_u}{b \cdot h^2 \cdot f_B} \;\Rightarrow\; k = \frac{h}{\sqrt{\dfrac{M_u}{b \times f_B}}}$$

Iz ovog izraza se određuje nepoznati položaj neutralne linije u preseku. Izraz nije moguće rešiti u zatvorenom obliku, već se sugeriše iterativni postupak. Pretpostavi se vrednost s, sračunaju ε_b i potrebni koeficijenti (α, η, ζ) i proveri da li je uslov ravnoteže zadovoljen. Postupak se ponavlja do postizanja potrebne/željene tačnosti.

Kada je određen položaj neutralne linije u preseku, poznata je stvarna vrednost sile D_{bu}. Iz uslova ravnoteže normalnih sila sledi:

$$\sum N = 0: \quad D_{bu} - Z_{au} = 0 \;\Rightarrow\; Z_{au} = D_{bu} = \frac{M_u}{z}$$

$$\boxed{A_{a1} = \frac{Z_{au}}{\sigma_{a1}} = \frac{M_u}{z \times \sigma_{a1}} = \frac{M_u}{\zeta \times h \times \sigma_{a1}}} \quad \textit{ili}$$

$$\boxed{A_{a1} = \frac{Z_{au}}{\sigma_{a1}} = \frac{D_{bu}}{\sigma_{a1}} = \frac{\alpha \cdot s \cdot b \cdot h \cdot f_B}{\sigma_{a1}} = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_{a1}}}$$

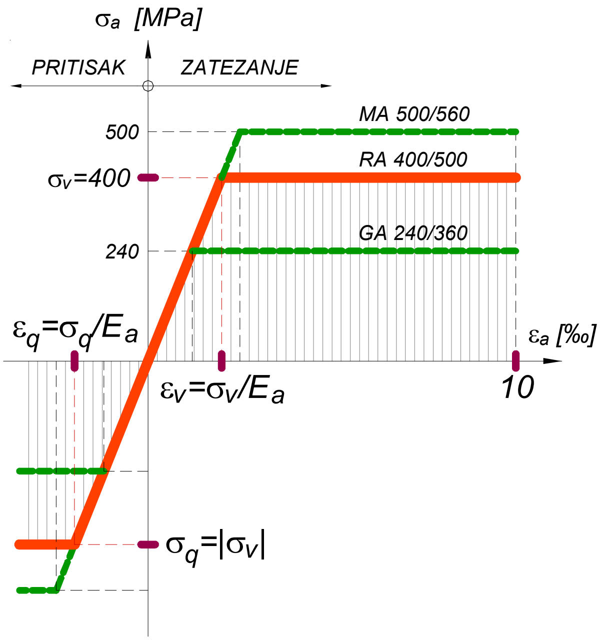
Sila u zategnutoj armaturi Z_{au} se određuje kao

$$\boxed{Z_{au} = A_{a1} \times \sigma_{a1}}$$

pri čemu je: $\sigma_{a1} = \varepsilon_{a1} \times E_a \le \sigma_v$

*Poslednji izraz predstavlja zapis radnog dijagrama za čelik, definisanog važećim propisima (Pravilnikom BAB 87) i važi kako za zatezanje, tako i za pritisak. Dakle, određivanjem **s** određena je i veličina napona σ_{a1}.*

Na isti način, pomoću radnog dijagrama za čelik (RDČ) se određuje i sila u pritisnutoj armaturi, ukoliko se ona pojavi kao računski potrebna.



*Svi potrebni izrazi su ispisani i potrebno je "samo" sprovesti iterativni proračun, za početak varirajući vrednost **s**. Kako nemamo baš nikakvu predstavu gde bi se neutralna linija mogla naći, početnu vrednost biramo potpuno nasumično.*

Recimo da pretpostavimo simultani lom. Sledi:

$$s \ge \frac{7}{27} = 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_b = 3.5‰ \;;\; \varepsilon_{a1} = \frac{1 - 0.259}{0.259} \times 3.5‰ = 10‰$$

Tačno je, ali i besmisleno reći "ovu vrednost je moguće pročitati i iz tablica za dimenzionisanje pravougaonih preseka", jer je čitav postupak započet kao da posedujemo znanje, ali ne i tablice.

$$\alpha = \frac{3\times3.5-2}{3\times3.5} = 0.810 \;\Rightarrow\; D_{bu} = 0.810\times0.259\times40\times53\times2.05 = 912.1\ kN$$

$$\eta = \frac{3.5\times(3\times3.5-4)+2}{2\times3.5\times(3\times3.5-2)} = 0.416 \;\Rightarrow\; z = 53\times(1-0.416\times0.259) = 47.3\,cm$$

$$D_{bu}\times z = 912.1\times47.3\times10^{-2} = 431\,kNm > M_u = 300\,kNm$$

Kako uslov ravnoteže nije zadovoljen, potrebno je promeniti pretpostavljeni položaj neutralne linije. Pošto je moment unutrašnjih sila veći od momenta spoljašnjih sila, treba smanjiti silu D_{bu}, odnosno smanjiti vrednost ***s*** *u narednoj iteraciji.*

$$s = 0.15 < 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{a1} = 10‰ \;;\; \varepsilon_b = \frac{0.15}{1-0.15}\times10‰ = 1.765‰$$

$$\alpha = \frac{1.765}{12}\times(6-1.765) = 0.623 \;\Rightarrow\; D_{bu} = 0.623\times0.15\times40\times53\times2.05 = 406.0\ kN$$

$$\eta = \frac{8-1.765}{4\times(6-1.765)} = 0.368 \;\Rightarrow\; z = 53\times(1-0.368\times0.15) = 50.1\,cm$$

$$D_{bu}\times z = 406.0\times50.1\times10^{-2} = 203\,kNm < M_u = 300\,kNm$$

Uslov ravnoteže ponovo nije zadovoljen, ali je moment unutrašnjih sila manji od momenta spoljašnjih sila, pa treba povećati silu D_{bu}, odnosno vrednost ***s*** *u narednoj iteraciji:*

$$\boxed{0.15 < s < 0.259}$$

$$s = 0.2 < 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{a1} = 10‰ \;;\; \varepsilon_b = \frac{0.2}{1-0.2}\times10‰ = 2.5‰$$

$$\alpha = \frac{3\times2.5-2}{3\times2.5} = 0.733 \;\Rightarrow\; D_{bu} = 0.733\times0.2\times40\times53\times2.05 = 637.4\ kN$$

$$\eta = \frac{2.5\times(3\times2.5-4)+2}{2\times2.5\times(3\times2.5-2)} = 0.391 \;\Rightarrow\; z = 53\times(1-0.391\times0.2) = 48.9\,cm$$

$$D_{bu}\times z = 637.4\times48.9\times10^{-2} = 311\,kNm > M_u = 300\,kNm$$

$$\boxed{0.15 < s < 0.2}$$

$$s = 0.1946 < 0.259 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{a1} = 10‰ \;;\; \varepsilon_b = \frac{0.1946}{1-0.1946}\times10‰ = 2.416‰$$

$$\alpha = \frac{3\times2.416-2}{3\times2.416} = 0.724 \;\Rightarrow\; D_{bu} = 0.724\times0.1946\times40\times53\times2.05 = 612.3\ kN$$

$$\eta = \frac{2.416\times(3\times2.416-4)+2}{2\times2.416\times(3\times2.416-2)} = 0.388 \;\Rightarrow\; z = 53\times(1-0.388\times0.1946) = 49.0\,cm$$

$$D_{bu} \times z = 612.3 \times 49.0 \times 10^{-2} = 300\ kNm = M_u \Rightarrow \boxed{s = 0.1946}$$

Uslov ravnoteže momenata savijanja je zadovoljen. O tačnosti koja je ovde potrebna nešto kasnije, da se ne izgubi iz vida šta je krajnji cilj proračuna. To NIJE određivanje položaja neutralne linije (što doduše jeste prvi i računski obiman korak) već određivanje potrebne površine armature iz uslova ravnoteže normalnih sila. Sledi:

$$\varepsilon_{a1} = 10‰ \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v \Rightarrow A_{a1} = \frac{Z_{au}}{\sigma_{a1}} = \frac{D_{bu}}{\sigma_v} = \frac{612.3}{40} = 15.31\ cm^2$$

što je, neuporedivo brže, sračunato pomoću tablica. Kada ih imamo na raspolaganju.

Ima li pomoći da se stvar malo ubrza, a ispis smanji? Naravno, bilo kakav program za tabelarne proračune, tipa MS Excel-a. Nije neophodan, ali je korisan za analizu - šta raditi i dokle ići sa iteracijama. Prethodno ispisan proračun biće prikazan tabelarno:

s	ε_b	ε_a	α	η	D_{bu}	ζ	z	D_{bu}×z	A_a
–	‰	‰	–	–	kN	–	cm	kNm	cm^2
0.2593	3.5	10	0.810	0.416	912.1	0.892	47.3	431.3	
0.15	1.765	10	0.623	0.368	406.0	0.945	50.1	203.3	
0.2	2.5	10	0.733	0.391	637.4	0.922	48.9	311.4	15.94
0.19	2.346	10	0.716	0.386	591.1	0.927	49.1	290.3	14.78
0.1952	2.425	10	0.725	0.389	615.0	0.924	49.0	301.2	15.38
0.1935	2.4	10	0.722	0.388	607.5	0.925	49.0	297.8	15.19
0.1946	**2.416**	**10**	**0.724**	**0.388**	**612.3**	**0.924**	**49.0**	**300**	**15.31**

Prve tri i poslednja iteracija prikazane su u prethodnom proračunu. Ako za prve dve iteracije nije bilo dileme da postignuta tačnost nije zadovoljavajuća, treća iteracija (s=0.2) je ostavila dilemu. Rezultat se od ciljanog razlikovao ispod 4%, što je blisko uobičajenoj inženjerskoj zahtevanoj tačnosti (često se smatra da je granica od 3% odstupanja zadovoljavajuća).

Rezultat proračuna je ovde površina armature, odnosno broj i prečnik šipki koje imaju računski potrebnu površinu preseka. S obzirom na raspoložive profile, ista količina armature bi bila usvojena kada bi se proračun završio trećom ili sedmom iteracijom, pa na beskompromisnoj tačnosti (recimo, ΣM = 0.000 kNm) nije neophodno insistirati.

U trećoj i četvrtoj iteraciji postignuta je približno ista tačnost. U ovom slučaju rezultat treće iteracije je na strani sigurnosti - moment unutrašnjih sila je veći od momenta spoljašnjih sila, dakle sila D_{bu} sračunata u ovoj iteraciji je veća od stvarne. Samim tim, i sila Z_{au}, odnosno površina armature A_a će biti nešto veći od stvarno računski potrebne.

*U petoj i šestoj iteraciji proračun je sproveden za vrednosti koje se pojavljuju u tablicama za dimenzionisanje. Cilj je da se pokaže da je dovoljno tačno uzimati u proračun bližu vrednost koeficijenta **k**, odnosno da nije potrebno vršiti interpolaciju tabličnih vrednosti. U slučaju da je sračunata vrednost **k** približno sredina tabličnih vrednosti, treba odabrati manju vrednost **k**, koja daje veću količinu armature (zaključak iz prethodnog stava).*

Proračunom u MS Excel-u dobija se apsolutna tačnost za vrlo kratko vreme, korišćenjem recimo ugrađene alatke "Goal seek". Algoritam proračuna je definisan u potpunosti, a detalji svakako ne spadaju u materiju ovog kursa. Ipak, sugeriše se upravo ovaj put kod potencijalnog "programiranja" odnosno automatizacije postupka dimenzionisanja.

*Ono što takođe nikako ne treba izgubiti iz vida je da je čitav proračun, bilo pomoću tablica, bilo iterativan, sproveden sa PRETPOSTAVLJENOM vrednošću statičke visine **h**. Ukoliko se pojavi znatno odstupanje od pretpostavljene vrednosti, proračun je potrebno ponoviti.*

P2. *Dimenzionisati gredni nosač iz primera P1, ukoliko je opterećen dvostruko većim stalnim i povremenim opterećenjem. Kvalitet materijala i presek zadržati.*

$$\left.\begin{aligned} M_g &= 48\times 5.0^2 / 8 = 150\,kNm \\ M_p &= 64\times 5.0^2 / 8 = 200\,kNm \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_u = 1.6\times 150 + 1.8\times 200 = 600\ kNm$$

pretp. $a_1 = 7\ cm \quad \Rightarrow \quad h = 60 - 7 = 53\ cm$

$$k = \frac{53}{\sqrt{\dfrac{600\times 10^2}{40\times 2.05}}} = 1.959 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\varepsilon_b / \varepsilon_a = 3.5 / 5.65‰ \\ &\bar{\mu} = 30.965\% \end{aligned}$$

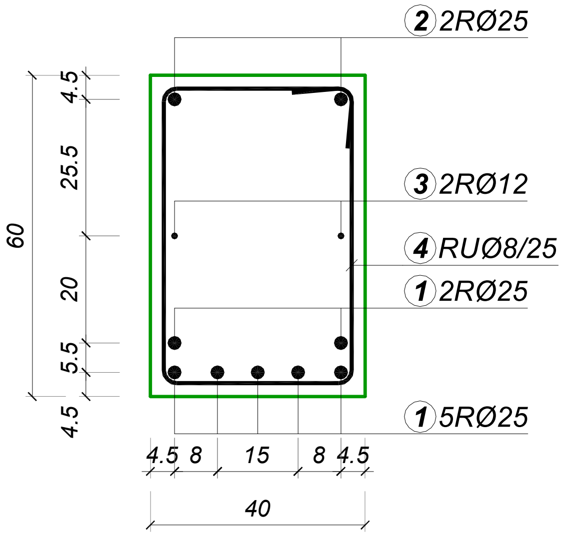
ε_a	ε_b	s	ζ	μ_{1M} %	k
5.7	3.5	0.380	0.842	30.797	1.964
5.65	**3.5**	**0.383**	**0.841**	**30.965**	**1.960**
5.6	3.5	0.385	0.840	31.136	1.955

$$A_a = \bar{\mu}\times\frac{b\times h}{100}\times\frac{f_B}{\sigma_v} = 30.965\times\frac{40\times 53}{100}\times\frac{2.05}{40}$$

$A_a = 33.64\ cm^2$ *ili:*

$$A_a = \frac{M_u}{\zeta\times h\times\sigma_v} = \frac{600\times 10^2}{0.841\times 53\times 40} = 33.66\ cm^2$$

usvojeno: ***7RØ25*** *(34.36 cm²)*



$$a' = a_0 + Ø_u + \frac{Ø}{2} = 2.5 + 0.8 + \frac{2.5}{2} = 4.55\ cm$$

usv. $a' = 4.5\ cm$

$$a'' = a'' + e_{v0} + 2\times\frac{Ø}{2} = 4.5 + 3 + 2.5 = 10\ cm \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{5\times 4.5 + 2\times 10}{7} = 6.07\ cm$$

$h_{stv.} = 60 - 6.07 = 53.93\ cm > h_{pretp} = 53\ cm$

Poređenja sa prethodnim primerom radi, sračunaćemo unutrašnje sile i njihove položaje:

$D_{bu} = \alpha\cdot s\cdot b\cdot h\cdot f_B = 0.810\times 0.383\times 40\times 53\times 2.05 = 1346.4\ kN$

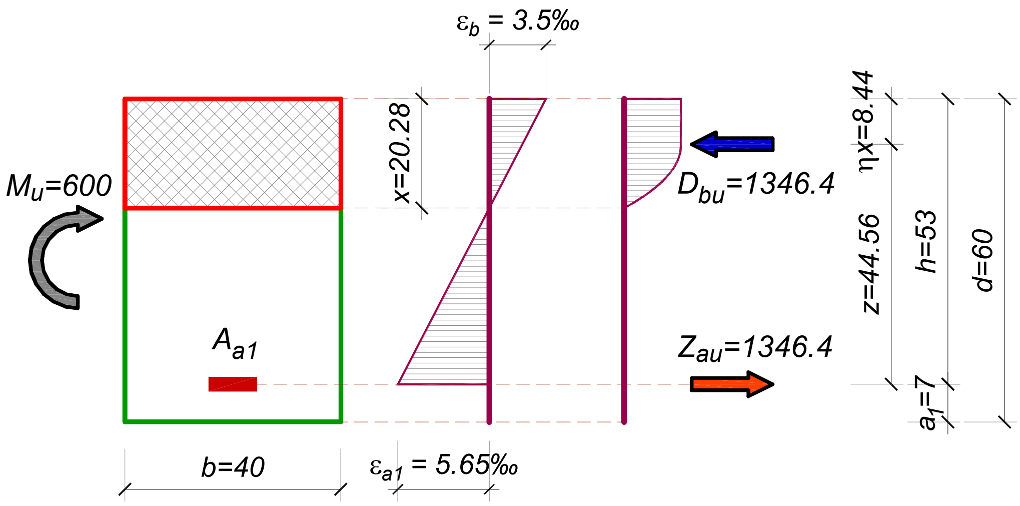
$x = s\cdot h = 0.383\times 53 = 20.28\ cm$ *- visina pritisnute zone preseka*

$\eta\cdot x = 0.416\times 20.28 = 8.44\ cm$ *- rastojanje sile D_{bu} od pritisnute ivice preseka*

$z = \zeta\cdot h = 0.841\times 53 = 44.56\ cm$ *- krak unutrašnjih sila*

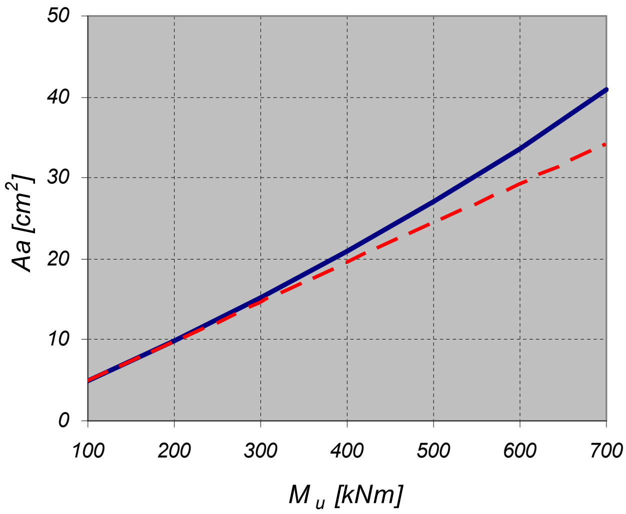
$$\varepsilon_{a1} = 5.65‰ > \varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E_a} = \frac{400}{210\times10^3} = 1.905‰ \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400\text{ MPa} = 40\text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = A_a \times \sigma_{a1} = A_a \times \sigma_v = 33.66\times40 = 1346.4\text{ kN}$$



U odnosu na prethodni primer zadržana je ista vrednost $h_{pretp.}$ = 53 cm, kako bi se njen nesporni uticaj na rezultat proračuna eliminisao. Sa istim ciljem zadržana je i ista širina preseka, kao i kvalitet materijala.

Puna linija prikazuje zavisnost računski potrebne površine armature A_a za navedeni presek u funkciji momenta savijanja M_u. Očito je da zavisnost vrlo malo odstupa od prave linije (isprekidana linija), odnosno da možemo okvirno zaključiti da dvaput većem M_u odgovara dvaput veća A_a (zapravo, nešto veća vrednost).



Ovo je najlakše zaključiti upoređujući sračunatu vrednost A_a iz izraza:

$$A_a = \frac{M_u}{z\times\sigma_v} = \frac{M_u}{\zeta\times h\times\sigma_v}$$

U primeru P1 dobijena je vrednost ζ=0.924 a u primeru P2 vrednost ζ=0.841. Kada se uporede vrednosti ovog koeficijenta iz tabela za dimenzionisanje pravougaonih preseka, vidi se da su u dosta uskim granicama, uglavnom oko prosečne vrednosti ζ=0.9, što se najčešće u proračunima i usvaja kao njegova približna vrednost. Odatle,

$$\boxed{A_a = \frac{M_u}{\zeta\times h\times\sigma_v} \approx \frac{M_u}{0.9\times h\times\sigma_v}}$$

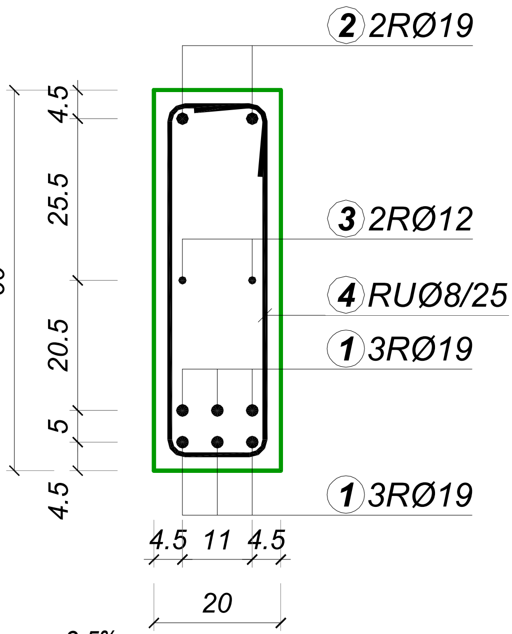
što predstavlja odličnu aproksimaciju (cca. ±10%), kad nemamo na raspolaganju tabele za dimenzionisanje ili odgovarajuće računarske programe.

U poslednjem izrazu ne figurišu širina preseka ni kvalitet betona, pa se može zaključiti da ta dva parametra ne utiču bitno na količinu armature kod savijanih nosača. Drugim rečima, ne predstavljaju parametre čijom će se promenom sračunata vrednost A_a bitno korigovati. Ovo će biti ilustrovano sa naredna dva primera.

P3. *Dimenzionisati gredni nosač iz primera P1, ukoliko je poprečni presek pravougaoni, dimenzija b/d = 20/60 cm. Kvalitet materijala i uticaje zadržati.*

pretp. $a_1 = 7$ cm $\Rightarrow$ $h = 60 - 7 = 53$ cm

$$k = \frac{53}{\sqrt{\dfrac{300\times 10^2}{20\times 2.05}}} = 1.959 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \varepsilon_b / \varepsilon_a = 3.5/5.65‰ \\ \bar{\mu} = 30.965\% \\ \zeta = 0.841 \end{array}$$



$$A_a = 30.965\times\frac{20\times 53}{100}\times\frac{2.05}{40} = 16.82\ cm^2$$

$$\text{ili:}\quad A_a = \frac{300\times 10^2}{0.841\times 53\times 40} = 16.83\ cm^2$$

usvojeno: **6RØ19** (17.01 cm^2)

$$a_1 = \frac{3\times 4.5 + 3\times 9.5}{6} = 7.0\ cm$$

$h_{stv.} = 60 – 7.0 = 53.0$ cm $= h_{pretp}$

$D_{bu} = 0.810×0.383×20×53×2.05$

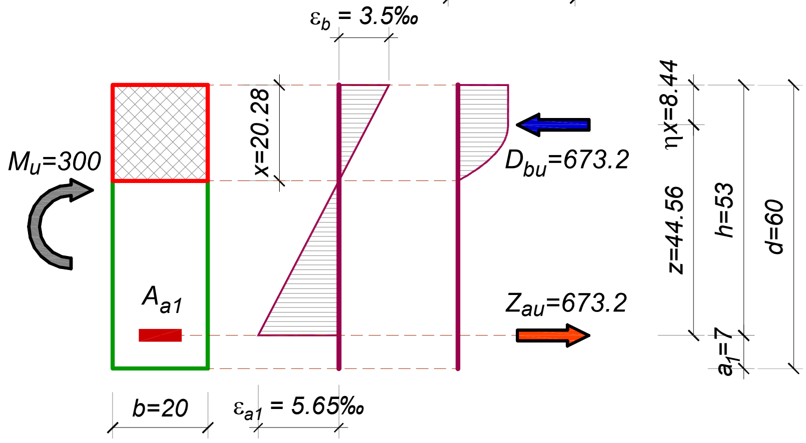
$D_{bu} = 673.2$ kN

$x = 0.383×53 = 20.28$ cm

$\eta\cdot x = 0.416×20.28 = 8.44$ cm

$z = \zeta\cdot h = 0.841×53 = 44.56$ cm

$Z_{au} = 16.83×40 = 673.2$ kN



P4. *Dimenzionisati gredni nosač iz primera P1, ukoliko je izveden od betona MB 50.*

MB 50 $\Rightarrow$ $f_B = 30$ MPa $= 3.0$ kN/cm^2 (član 82. Pravilnika BAB 87)

pretp. $a_1 = 7$ cm $\Rightarrow$ $h = 60 - 7 = 53$ cm

$$k = \frac{53}{\sqrt{\dfrac{300\times 10^2}{40\times 3.0}}} = 3.352 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \varepsilon_b / \varepsilon_a = 1.775/10‰ \\ \bar{\mu} = 9.241\% \\ \zeta = 0.944 \end{array}$$

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} = 9.241 \times \frac{40 \times 53}{100} \times \frac{3.0}{40} = 14.98\ cm^2 \quad ili:$$

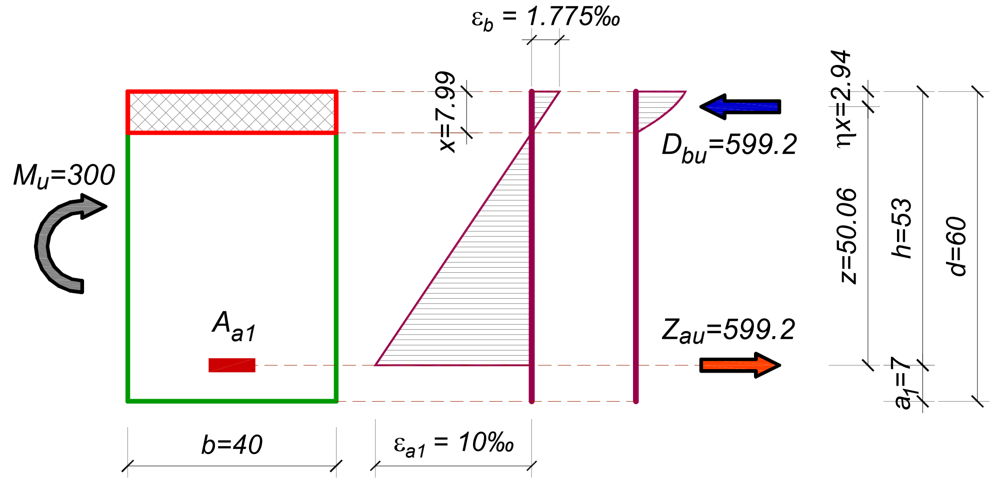
$$A_a = \frac{M_u}{\zeta \times h \times \sigma_v} = \frac{300 \times 10^2}{0.944 \times 53 \times 40} = 14.98\ cm^2$$

Usvojeni poprečni presek je isti kao u primeru P1.

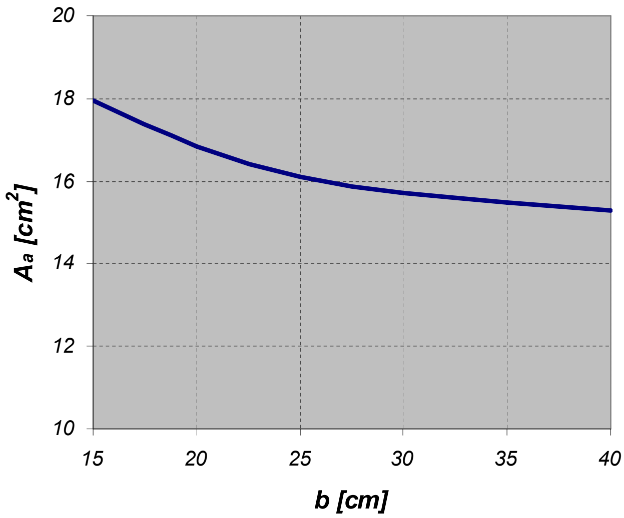
$D_{bu} = 0.625 \times 0.151 \times 40 \times 53 \times 3.0 = 599.2\ kN$; $x = 0.151 \times 53 = 7.99\ cm$

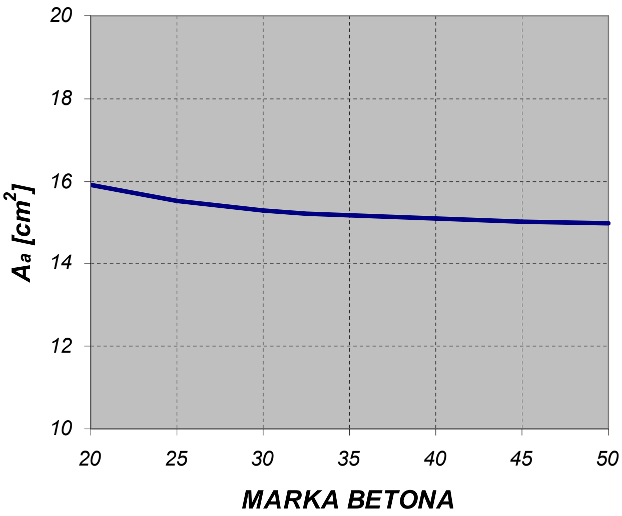
$\eta \cdot x = 0.368 \times 7.99 = 2.94\ cm$ $\Rightarrow$ $z = 0.944 \times 53 = 50.06\ cm$

$Z_{au} = A_{a1} \times \sigma_{a1} = 14.98 \times 40 = 599.2\ kN$



Zavisnost računski potrebne površine armature A_a od širine poprečnog preseka i kvaliteta betona prikazana je na narednim dijagramima (M_u = 300 kNm, d = 60 cm, h = 53 cm).





Priloženi dijagrami potvrđuju da ova dva parametra ne utiču bitno na količinu armature kod savijanih nosača. Širina preseka značajnije utiče kroz eventualno povećanje statičke visine (omogućeno je smeštanje većeg broja šipki u jednom horizontalnom redu). Preseci veće širine, izvedeni od betona višeg kvaliteta, pri istim ostalim parametrima, zahtevaju nešto manje armature, ali ta razlika retko prelazi par procenata.

Rezime:

Pod pojmom "dimenzionisanje" se obavezno podrazumeva određivanje potrebne površine armature, koja se određuje iz uslova ravnoteže normalnih sila.

*Ukoliko je pritom poznata visina preseka, iz uslova ravnoteže momenata savijanja određuje se položaj neutralne linije u preseku (bezdimenzioni koeficijent **s**). Ovaj postupak se obično naziva "vezano dimenzionisanje".*

*Ukoliko visina preseka nije poznata (zadata), položaj neutralne linije se po volji bira, a iz uslova ravnoteže momenata savijanja se sračunava statička visina **h** i visina preseka **d**. Ovaj postupak se obično naziva "slobodno dimenzionisanje".*

Granični računski uticaji u preseku se dobijaju množenjem uticaja usled pojedinih opterećenja parcijalnim koeficijentima sigurnosti. Ovi koeficijenti uzimaju najmanje od svih Pravilnikom definisanih vrednosti, jer će uvek biti ostvaren uslov $\varepsilon_{a1} \geq 3‰$.

Ukoliko se proračunom dobije da je $\varepsilon_{a1} < 3‰$, pristupa se dvojnom (dvostrukom, obostranom) armiranju, čime se ε_{a1} zadržava na nivou od 3‰ ili većem. Računski potrebna armatura se, osim u zategnutu, smešta i u pritisnutu zonu preseka. Valja naglasiti da su to izuzeci, a nikako pravilo kako preseci treba da budu armirani.

Potrebna površina armature se sračunava iz izraza

$$\boxed{A_a = \frac{M_u}{\zeta \times h \times \sigma_v} \approx \frac{M_u}{0.9 \times h \times \sigma_v}}$$

Kada je napisan u ovom obliku, a pogotovu imajući u vidu približni izraz zasnovan na uprosečenoj vrednosti koeficijenta kraka unutrašnjih sila $\zeta \approx 0.9$, lako je uočiti:

- ***n** puta većem momentu savijanja M_u orijentaciono odgovara **n** puta veća površina armature A_{a1};*
- ***m** puta većoj visini preseka (zapravo, statičkoj visini h) odgovara **m** puta manja površina armature A_{a1};*
- *širina poprečnog preseka i kvalitet betona ne utiču **bitno** na vrednost A_{a1};*
- *odstupanje rezultata dobijenog tačnim, odnosno približnim izrazom je maksimalno ±10%, koliko je i maksimalno odstupanje koeficijenta ζ od uprosečene vrednosti.*

Takođe, valja odmah naglasiti da se pri izradi numeričkih primera u godišnjim i ispitnim zadacima nikako ne dopušta korišćenje približnog izraza za određivanje A_{a1}, ali se on može koristiti kao provera nešto složenijih, tačnih postupaka dimenzionisanja.

*Kod korišćenja tabela za dimenzionisanje savijanih nosača nije potrebno vršiti interpolaciju koeficijenata (očitavanje koeficijenta **k**), već usvajati bliže vrednosti kao tačne. Izuzetno, usvojiti vrednost koja daje veći koeficijent armiranja, odnosno veću vrednost A_{a1}.*

Kada se sračuna potrebna površina armature, potrebno je usvojiti broj i prečnik profila i rasporediti ih tako da budu zadovoljene odredbe Pravilnika (debljina zaštitnih slojeva, čist razmak između profila). Ukoliko stepen agresivnosti sredine nije eksplicitno naveden, smatrati da se elementi nalaze "napolju", u uslovima umereno agresivne sredine.

*Kod usvajanja profila ne treba težiti dobijanju pretpostavljene vrednosti statičke visine **h**, već profile rasporediti tako da se, uz zadovoljenje propisanih rastojanja, dobije najveća moguća statička visina, odnosno najveća nosivost preseka.*

*Korekcija pretpostavljene vrednosti statičke visine **h** najčešće nije potrebna, a nekada ni praktično moguća. Po pravilu se usvaja veća površina armature od sračunate[1], pa je moguće da i statička visina malo odstupi od pretpostavljene vrednosti. Potrebna površina armature $A_{a,potr.}$ se sračunava kao:*

$$A_{a,potr.} = \frac{M_u}{\zeta_{rač.} \times h_{pretp.} \times \sigma_v}$$

S druge strane, nosivost poprečnog preseka je zadovoljena ukoliko usvojena armatura $A_{a,usv.}$ sa stvarnom statičnom visinom zadovoljava izraz:

$$A_{a,usv.} \geq \frac{M_u}{\zeta_{stv.} \times h_{stv.} \times \sigma_v}$$

iz čega se lako zaključuje

$$A_{a,potr.} \times \zeta_{rač.} \times h_{pretp.} \leq A_{a,usv.} \times \zeta_{stv.} \times h_{stv.} \;\Rightarrow\; A_{a,potr.} \times h_{pretp.} \leq A_{a,usv.} \times h_{stv.}$$

s obzirom na praktično beznačajnu razliku koeficijenata kraka unutrašnjih sila u ovom slučaju (praktično susedne vrednosti iz tabela, različite obično za 0.001).

[1] Stari propisi PBAB 71, zasnovani na Teoriji dopuštenih napona, su dozvoljavali prekoračenje dopuštenog napona u armaturi za 3%, što je omogućavalo da usvojena površina armature bude 3% manja od sračunate.