

Primer 1. Dimenzionisati nosač sistema proste grede, raspona $L = 6.0$ m, opterećen jednako raspodeljenim stalnim opterećenjem $g = 40$ kN/m po čitavom rasponu. U opterećenje je uračunata i sopstvena težina nosača. Poprečni presek je pravougaoni, dimenzija $b/d = 25/60$ cm. Kvalitet materijala: MB 30, RA 400/500.

Dimenzionisanje prema momentima savijanja

Pri proračunu nominalnog napona smicanja τ_n koristi se statička visina h , pa je najpre potrebno sprovesti dimenzionisanje prema momentima savijanja.

$$M_g = 40 \times 6.0^2 / 8 = 180 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad M_u = 1.6 \times 180 = 288 \text{ kNm}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad h = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$$

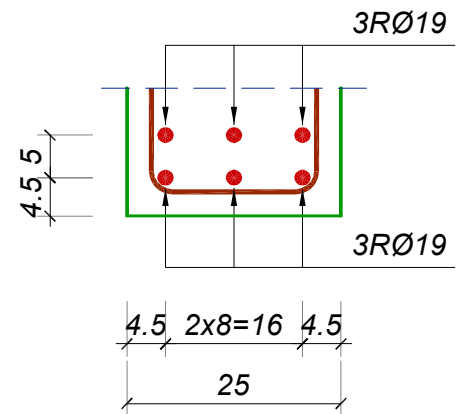
$$k = \frac{53}{\sqrt{\frac{288 \times 10^2}{25 \times 2.05}}} = 2.236 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = 3.5 / 9.018\% \\ \bar{\mu} = 22.633\%$$

$$A_a = 22.633 \times \frac{25 \times 53}{100} \times \frac{2.05}{40} = 15.37 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **6RØ19** (17.01 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times (4.5 + 9.5)}{6} = 7 \text{ cm}$$

$$h_{stv.} = 60 - 7 = 53 \text{ cm} = h_{pretp.}$$



Određivanje nominalnog napona smicanja

$$T_g = 40 \times 6.0 / 2 = 120 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad T_u = T_{mu} = 1.6 \times 120 = 192 \text{ kN}$$

$$\tau_n = \frac{T_{mu}}{b \times z} \approx \frac{T_{mu}}{b \times 0.9 \times h} = \frac{192}{25 \times 0.9 \times 53} = 0.161 \text{ kN/cm}^2 = 1.61 \text{ MPa}$$

$$\text{MB 30} \quad \Rightarrow \quad \tau_r = 1.1 \text{ MPa (član 89. Pravilnika BAB 87)}$$

Kako je u najopterećenijem preseku prekoračena računska čvrstoća betona pri čistom smicanju τ_r , to je potrebno osiguranje armaturom. Istovremeno, može se konstatovati da je

$$\tau_n = 1.61 \text{ MPa} < 5\tau_r = 5.5 \text{ MPa}$$

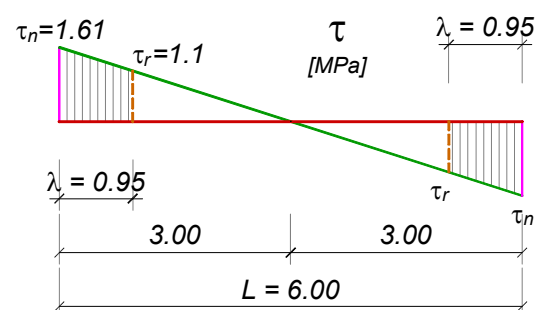
pa nije potrebno korigovati dimenzije poprečnog preseka ili marku betona.

Određivanje dužine osiguranja

Predstavlja dužinu na kojoj je prekoračena računska čvrstoća τ_r , odnosno gde je potrebna računska poprečna i podužna armatura.

$$\lambda = \frac{L}{2} \times \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_n}\right) = \frac{6.0}{2} \times \left(1 - \frac{1.1}{1.61}\right) = 0.95 \text{ m}$$

Zbog uočenog velikog broja grešaka u izradi zadatka, napominje se da ne postoji univerzalni izraz



za određivanje dužine osiguranja, već je potrebno naći dužinu dela nosača na kome je napon τ_n veći od čvrstoće τ_r .

Određivanje potrebne armature

Osiguranje se vrši **poprečnom** (uzengije i, po potrebi, koso povijeni profili), i **podužnom** armaturom. Kako je nominalni napon smicanja

$$\tau_n = 1.61 \text{ MPa} < 3\tau_r = 3.3 \text{ MPa}$$

poprečna armatura se određuje iz redukovanog napona smicanja τ_{Ru} .

$$T_{bu} = \frac{1}{2} \times (3\tau_r - \tau_n) \times b \times z$$

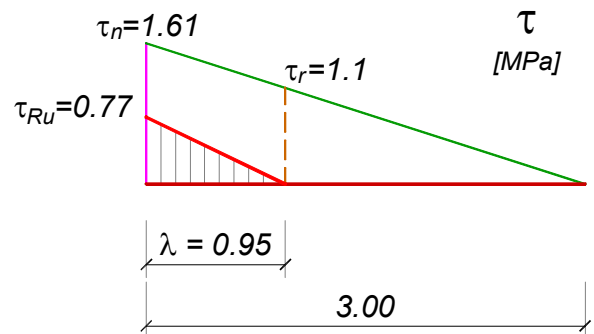
$$T_{bu} = \frac{1}{2} \times (3 \times 0.11 - 0.161) \times 25 \times 0.9 \times 53$$

$$T_{bu} = 100.8 \text{ kN}$$

$$T_{Ru} = T_{mu} - T_{bu} = 192 - 100.8 = 91.2 \text{ kN}$$

$$\tau_{Ru} = \frac{T_{Ru}}{b \times z} \approx \frac{T_{Ru}}{b \times 0.9 \times h} = \frac{91.2}{25 \times 0.9 \times 53} = 0.077 \text{ kN/cm}^2 = 0.77 \text{ MPa}, \text{ ili kraće:}$$

$$\tau_{Ru} = \frac{3}{2} \times (\tau_n - \tau_r) = \frac{3}{2} \times (0.161 - 0.11) = 0.077 \text{ kN/cm}^2$$



Redukovani napon smicanja τ_{Ru} nema potrebe upoređivati sa računskom čvrstoćom τ_r .

Uobičajeno je da se kao poprečna armatura, kad god je to moguće, koriste dvosečne vertikalne uzengije. Stoga se usvaja:

$$m = 2 \quad ; \quad \theta = 45^\circ \quad ; \quad \alpha = 90^\circ$$

i sračunava potreban razmak armature (uzengija), iz uslova da napon koji uzengije mogu prihvatiti bude jednak redukovanom naponu smicanja τ_{Ru} :

$$e_u \leq \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times \tau_{Ru}} \times \sigma_v \times (\cos \alpha + \sin \alpha \times \cot \theta)$$

$$e_u \leq \frac{2 \times a_u^{(1)}}{25 \times 0.077} \times 40 \times (\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ) = 41.82 \times a_u^{(1)}$$

Mogućnosti izbora prečnika uzengija su sužene - na raspolaganju su praktično profili $\varnothing 8$, 10 i 12¹, pa se redovno usvaja prečnik armature a potrebno rastojanje sračunava:

$$\text{pretp. } R\varnothing 10 (a_u^{(1)} = 0.785 \text{ cm}^2) \quad \Rightarrow \quad e_u \leq 41.82 \times 0.785 = 32.9 \text{ cm}$$

Nosivost preseka bi bila zadovoljena i usvajanjem razmaka od 30 cm. Ipak, maksimalno rastojanje uzengija **na dužini osiguranja** se ograničava na:

¹ Šipke većih prečnika od 12 mm se ne mogu na propisan način oblikovati (za detalje pogledati odeljak "Oblikovanje armature" u Pravilniku BAB 87, članovi 139-147), dok se šipke prečnika manjeg od 8 mm praktično ne mogu nabaviti, pogotovu traženog kvaliteta RA 400/500.

$$e_{u,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} b = 25 \text{ cm} \\ h/2 = 53/2 = 26.5 \text{ cm} \\ 25 \text{ cm} \end{array} \right\} = 25 \text{ cm}$$

Usvajanje maksimalnog dopuštenog rastojanja od 25 cm, uz zadržavanje pretpostavljenog prečnika uzengija, rezultiralo bi usvajanjem $(32.9-25)/25 \times 100\% = 31\%$ veće armature od računski potrebne. Stoga je racionalno smanjiti pretpostavljeni prečnik uzengije. Sledi:

$$\text{pretp. } R\emptyset 8 \ (a_u^{(1)} = 0.503 \text{ cm}^2) \Rightarrow e_u \leq 41.82 \times 0.503 = 21.0 \text{ cm} < 25 \text{ cm} = e_{u,max}.$$

Pored maksimalnog rastojanja, Pravilnik BAB 87 u članu 94 propisuje i minimalni procenat armiranja uzengijama **na dužini osiguranja**:

$$\mu_{uz} = \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times e_u} \geq 0.2\%$$

$$UR\emptyset 8 \Rightarrow e_u \leq \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times \mu_{uz,min.}} = \frac{2 \times 0.503}{25 \times 0.2 \times 10^{-2}} = 20.1 \text{ cm} > e_{u,rač.} = 21.0 \text{ cm}$$

usvojeno: **UR \emptyset 8/20** ($m=2$) na dužini $\lambda = 1 \text{ m}$

Crveno označen tekst "**na dužini osiguranja**" sugeriše da van dužine osiguranja, odnosno na delu nosača na kome je $\tau_n \leq \tau_r$, nije potrebno zadovoljiti prethodno navedene uslove u pogledu maksimalnog rastojanja ili minimalnog procenta armiranja uzengijama.

Dodatna podužna zategnuta armatura se određuje iz izraza:

$$\Delta A_a = \frac{T_{mu}}{2\sigma_v} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

Posebno se naglašava da je u članu 93. Pravilnika BAB 87 učinjena štamparska greška, pa u izrazu za ΔA_a stoji T_{Ru} umesto T_{mu} . Greška je navedena na kraju teksta Pravilnika.

$$\Delta A_a = \frac{192}{2 \times 40} (\cot 45^\circ - \cot 90^\circ) = 2.40 \text{ cm}^2$$

Ova armatura se sabira sa postojećom armaturom sračunatom za momente savijanja. U preseku sa maksimalnom transverzalnom silom, za koji je armatura sračunata, moment savijanja $M=0$, pa je ΔA_a jedina statički potrebna armatura. U ostalim presecima **na dužini osiguranja** ova armatura se smanjuje proporcionalno smanjenju sile T_u . Superponira se sa armaturom potrebnom za prihvatanje M , što se, po pravilu, radi grafički (član 167. Pravilnika BAB 87).

usvojeno: **2R \emptyset 19** (5.68 cm^2)²

Konstrukcija linije zatežućih sila

Armatura za prihvatanje momenata savijanja sračunava se prema izrazu:

$$A_a = \frac{M_u}{z \times \sigma_v} \approx \frac{M_u}{0.9 \times h \times \sigma_v}$$

² Članom 168. Pravilnika BAB 87 određeno je da se preko "**slobodnog krajnjeg oslonca ili krajnjeg oslonca sa delimičnim uklještenjem**" mora prevesti NAJMANJE TREĆINA UKUPNE ARMATURE U POLJU.

Usvajanjem konstantne vrednosti kraka unutrašnjih sila z duž nosača, potrebna površina armature u potpunosti odgovara promeni momenta savijanja duž nosača.

Sila zatezanja u armaturi se određuje kao:

$$Z_{au} = A_a \times \sigma_v = \frac{M_u}{z} \approx \frac{M_u}{0.9 \times h}$$

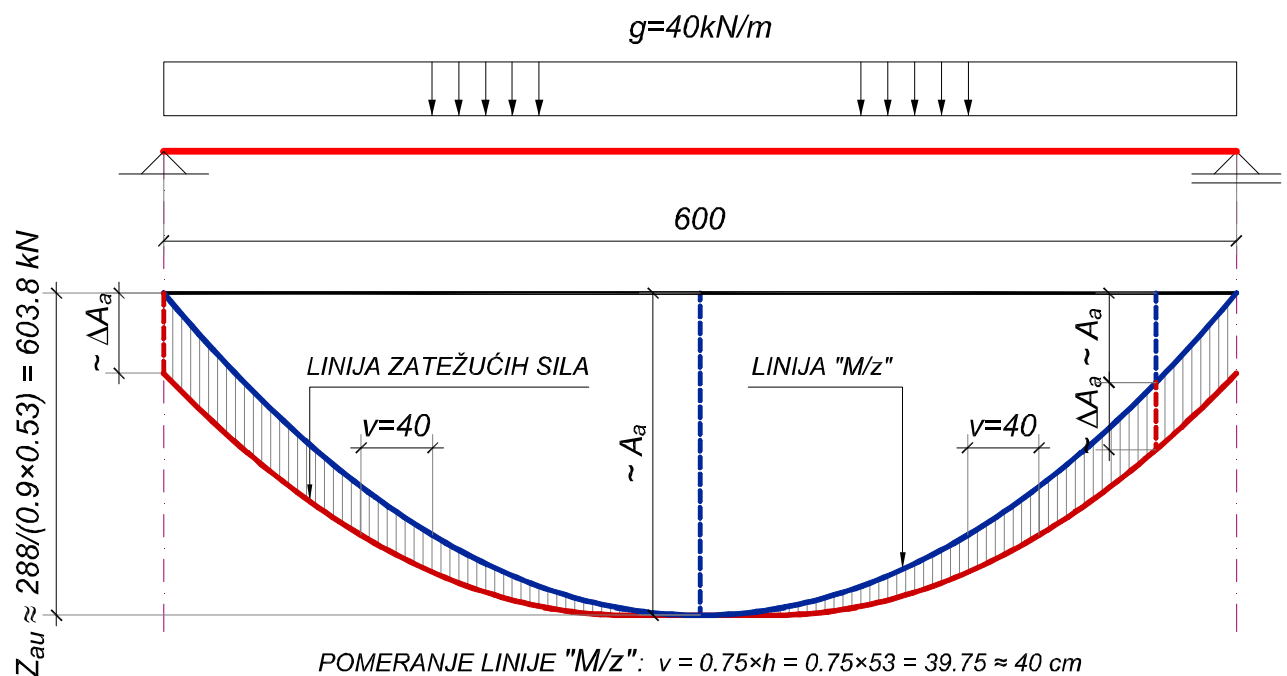
odnosno, dijagram sile zatezanja u armaturi usled M i eventualno N (linije " M/z ", član 167. BAB 87) je afin sa dijagramom graničnog računskog momenta savijanja M_u . U konkretnom slučaju, ima oblik kvadratne parabole, sa strelom:

$$f = Z_{au, \max} = \frac{M_{u, \max}}{0.9 \times h} = \frac{288 \times 10^2}{0.9 \times 53} = 603.8 \text{ kN}$$

Sada je potrebno izvršiti pomeranje linije " M/z " duž ose nosača za veličinu v , čija vrednost zavisi od načina prihvatanja glavnih napona zatezanja. U primeru se za osiguranje koriste samo vertikalne uzengije, pa je, prema članu 167:

$$v = 0.75 \times h = 0.75 \times 53 = 39.75 \approx 40 \text{ cm}$$

Dobijena je **linija zatežućih sila**, prema kojoj se vrši usvajanje armature, odnosno određuje potrebna dužina pojedinih profila. Razlika ordinata ove linije i linije " M/z " orijentaciono prikazuje potrebnu armaturu ΔA_a .



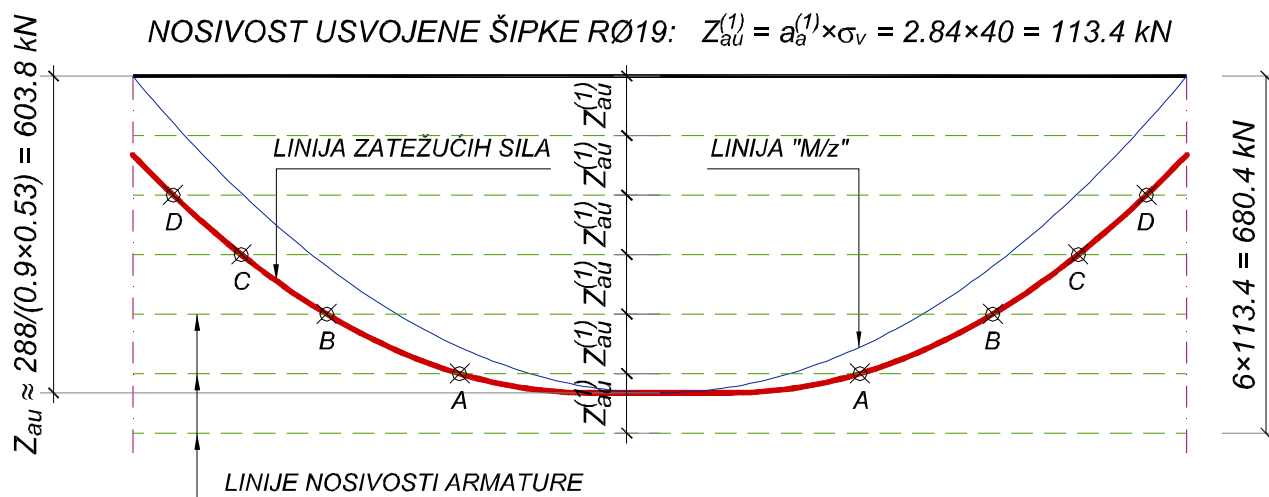
Vođenje armature duž nosača

Armatura je sračunata i usvojena u karakterističnim presecima (polje - prema M , oslonac - prema T). U ostalim presecima duž nosača njeno usvajanje se sprovodi grafički, prema konstruisanoj liniji zatežućih sila.

Usvojena armatura u preseku u polju je $R\emptyset 19$. Sila zatezanja koju može prihvatiti jedna šipka ovog prečnika i kvaliteta jednaka je:

$$Z_{au}^{(1)} = a_a^{(1)} \times \sigma_v = 2.84 \times 40 = 113.4 \text{ kN}$$

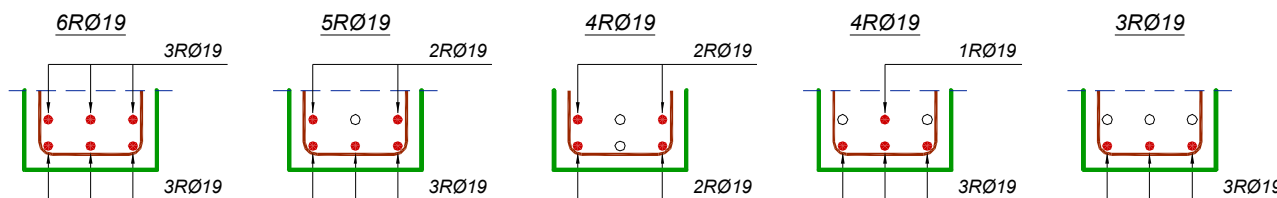
Ukupno usvojenih 6 profila mogu prihvatiti silu zatezanja $Z_{au} = 6 \times 113.4 = 680.4 \text{ kN}$, što je više od potrebne sile $Z_{au, \max.} = 603.8 \text{ kN}$, određene iz maksimalnog momenta savijanja **PRIBLIŽNIM**³ postupkom. Da bi bile određene statički potrebne (a time i ukupne) dužine svake pojedinačne šipke, potrebno je preko linije zatežućih sila konstruisati familiju linija koje predstavljaju nosivost armature (isprekidane ekvidistantne horizontalne linije na skici).



Presečne tačke linije zatežućih sila (potrebna armatura) sa linijama nosivosti (usvojena armatura) označene su slovima A do D. Može se uočiti da je između tačaka D potrebno više od 2RØ19, između tačaka C više od 3RØ19, između tačaka B više od 4RØ19 i između tačaka A više od 5RØ19. Ove statičke zahteve potrebno je uklopiti sa konkretnim rasporedom armature u preseku i na logičan način ukidati pojedine šipke, vodeći računa da:

- u preseku ne može biti manje od dva profila;
- raspored armature u odnosu na vertikalnu osu preseka treba da bude simetričan (izuzetno, i to na vrlo maloj dužini, od toga se može odstupiti kod usvajanja koso povijenih profila);
- šipke se iz preseka ukidaju obrnutim redosledom od dodavanja - najpre se ukidaju srednje šipke iz gornjih redova armature, pa redom do dve ugaone.

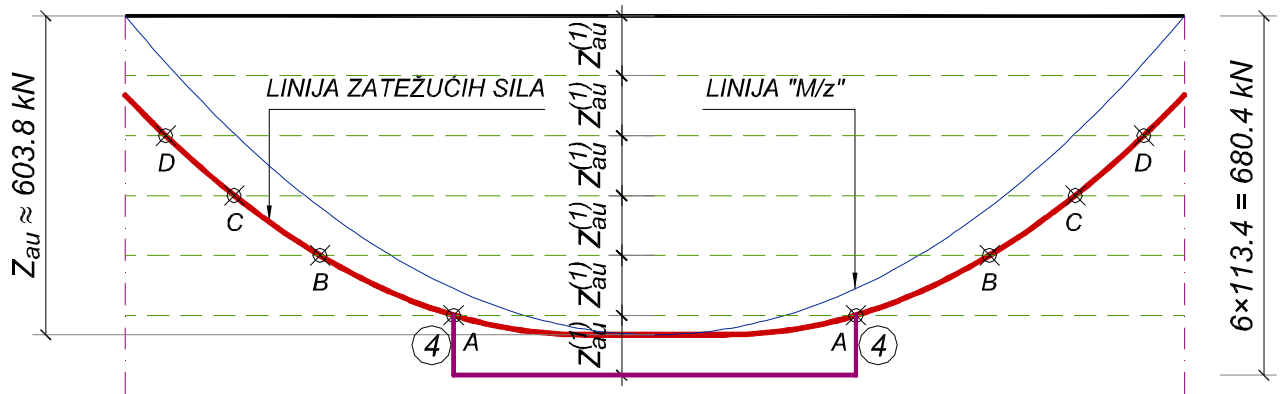
U usvojenom preseku je neparan broj profila u jednom horizontalnom redu, što omogućava veću fleksibilnost - moguće je ukinuti jedan, dva ili sva tri profila odjednom. Mogući rasporedi armature nakon ukidanja pojedinih profila prikazani su na narednoj skici. Šipke koje se ukidaju su obeležene praznim kružićem.



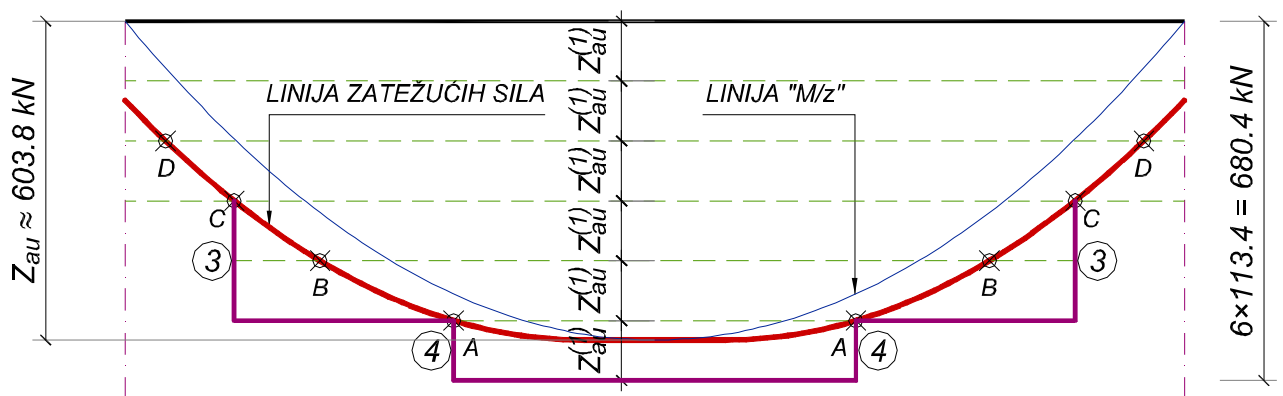
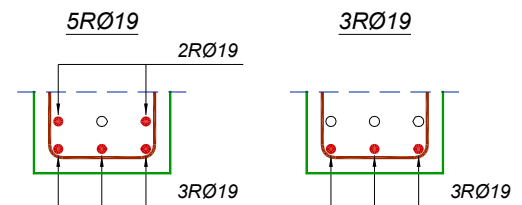
³ Grafičko dimenzionisanje je PRIBLIŽAN postupak i ne služi dimenzionisanju karakterističnih, već svih ostalih preseka duž nosača. TAČNA vrednost kraka unutrašnjih sila (a time i sile Z_{au}) se određuje dimenzionisanjem. Ukoliko se pri grafičkoj konstrukciji pojave prividne nedoslednosti vezane za dimenzionisane preseke, ignorišu se i prednost daje analitički sprovedenom rešenju, o čemu će u narednom primeru biti više reči.

Presek armiran sa 5RØ19 ima dovoljnu nosivost na delu od oslonca sve do tačke A. Ukoliko se, pak, ukinu dva profila odjednom, preostala armatura je dovoljna od oslonca do tačke B, odnosno šest profila u preseku bi zadržali između tačaka B. Pri tome nijedan od dva moguća rasporeda ne spada u "idealne". Ukidanje tri profila odjednom bi zahtevalo da se maksimalno potrebna armatura vodi gotovo po čitavom rasponu nosača (između tačaka C), i češće se koristi kada je u pitanju armiranje gornje zone, gde je momentni dijagram strmiji, odnosno razlike u dužinama pojedinih šipki manje.

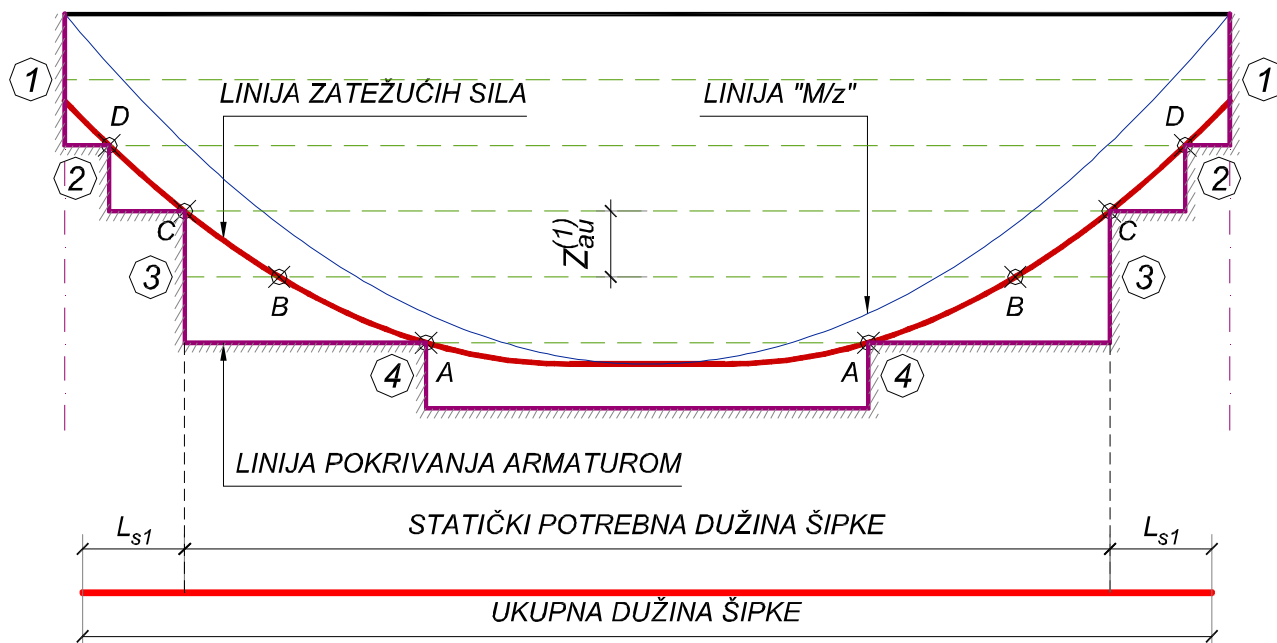
U primeru je odabrano da se ukine jedan profil. Mesto ukidanja je u tački A, odnosno statički potrebna dužina šipke je (premereno sa crteža) 228 cm. Šipka je označena brojem 4, koji predstavlja njenu jedinstvenu oznaku u planu i rekapitulaciji armature.



Postupak se u potpunosti ponavlja. U preseku je, na delu između oslonca i tačke A, preostalo 5 profila. Moguće je ukinuti srednju šipku iz donjeg reda (tačka B), ili odjednom dve šipke iz gornjeg reda (tačka C), što je u primeru odabrano kao rešenje. Statički potrebna dužina ovih šipki je (mereno) 476 cm. Šipke su označene brojem 3.



Konačno, između oslonca i tačke C preostala su tri profila u preseku. Moguće je ukinuti srednju šipku (tačka D). Statički potrebna dužina ove šipke je 554 cm, a označena je brojem 2. Preostale dve šipke su potrebne celom dužinom nosača i označene su brojem 1.



Na statički potrebne dužine potrebno je dodati i dužine sidrenja, određene prema članovima 148-153 Pravilnika BAB 87. Za uslove dobre adhezije (član 149 BAB, šipke u donjoj polovini preseka, odnosno udaljene više od 30 cm od gornje ivice pri betoniranju), za usvojen kvalitet materijala sledi:

$$MB 30 ; RA 400/500 \Rightarrow \tau_p = 1.75 \text{ MPa}$$

$$L_{s1} = \frac{\emptyset}{4} \times \frac{\sigma_v}{1.8 \times \tau_p} = \frac{\emptyset}{4} \times \frac{400}{1.8 \times 1.75} = 31.7 \times \emptyset = 31.7 \times 1.9 = 60.3 \approx 60 \text{ cm}$$

Primer 2. Dimenzionisati nosač sistema proste grede, raspona $L = 4.5$ m, opterećen koncentrisanim povremenim opterećenjem $P = 300$ kN koje deluje u trećini raspona. Sopstvenu težinu nosača zanemariti. Poprečni presek je pravougaoni, dimenzija $b/d = 30/65$ cm. Kvalitet materijala: MB 25, RA 400/500.

Dijagrami presečnih sila

$$A_p = 300 \times 1.5 / 4.5 = 100 \text{ kN}$$

$$B_p = 300 - 100 = 200 \text{ kN}$$

$$M_{p,max} = 200 \times 1.5 = 300 \text{ kNm}$$

Dimenzionisanje prema momentima savijanja

$$M_u = 1.8 \times 300 = 540 \text{ kNm}$$

$$a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow h = 65 - 7 = 58 \text{ cm}$$

$$\text{MB 25} \Rightarrow f_B = 17.25 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{58}{\sqrt{\frac{540 \times 10^2}{30 \times 1.725}}} = 1.796 \Rightarrow \frac{\epsilon_b}{\epsilon_a} = 3.5 / 3.82\%$$

$$\mu = 38.709\%$$

$$A_a = 38.709 \times \frac{30 \times 58}{100} \times \frac{1.725}{40} = 29.05 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{6R\O25} \text{ (29.45 cm}^2\text{)}$$

Osiguranje na delu uz oslonac B

$$\text{usvojeno: } z \approx 0.9h = 0.9 \times 58 = 52.2 \text{ cm} = \text{const.}$$

$$T_{u,max.} = T_u^B = 1.8 \times 200 = 360 \text{ kN}$$

$$\tau_n = \frac{T_u^B}{b \times z} = \frac{360}{30 \times 52} = 0.230 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 2.30 \text{ MPa} \begin{cases} > \tau_r = 0.95 \text{ MPa} \\ < 3\tau_r = 2.85 \text{ MPa} \end{cases}$$

Kako je napon τ_n konstantan i veći od τ_r , dužina osiguranja je $\lambda_b = 150$ cm.

$$\tau_{Ru}^B = \frac{3}{2} \times (0.230 - 0.095) = 0.202 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 2.02 \text{ MPa}$$

$$\text{Usvojeno: } m = 2 ; \theta = 45^\circ ; \alpha = 90^\circ$$

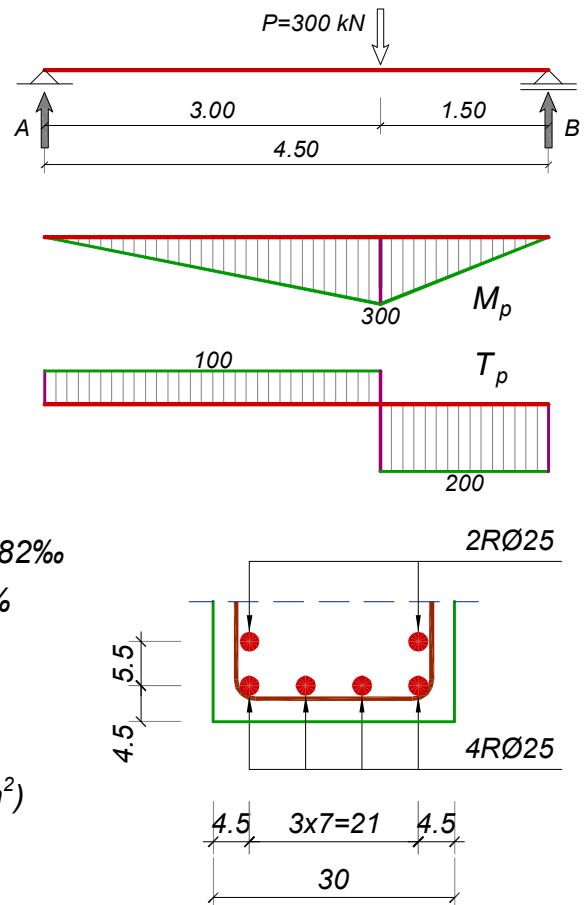
$$e_u \leq \frac{2 \times a_u^{(1)}}{30 \times 0.202} \times 40 \times (\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ) = 13.18 \times a_u^{(1)}$$

$$\text{pretp. } R\O10 \text{ (} a_u^{(1)} = 0.785 \text{ cm}^2 \text{)} \Rightarrow e_u \leq 13.18 \times 0.785 = 10.35 \text{ cm}$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{UR\O10/10} \text{ (} m=2 \text{) na dužini } \lambda_b = 1.5 \text{ m}$$

$$\Delta A_a = \frac{360}{2 \times 40} (\cot 45^\circ - \cot 90^\circ) = 4.50 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{2R\O25} \text{ (9.82 cm}^2\text{)}$$



Osiguranje na delu uz oslonac A

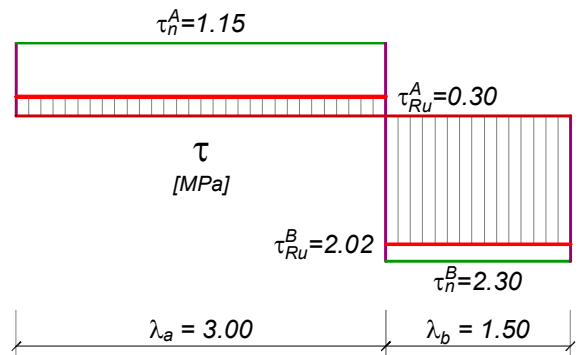
$$T_u^A = 1.8 \times 100 = 180 \text{ kN}$$

$$\tau_n^A = \frac{180}{30 \times 52.2} = 0.115 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \begin{cases} > \tau_r \\ < 3\tau_r \end{cases}$$

Kako je napon τ_n konstantan i veći od τ_r , duži-na osiguranja je $\lambda_a = 300 \text{ cm}$.

$$\tau_{Ru}^A = \frac{3}{2} \times (0.115 - 0.095) = 0.030 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$e_u \leq \frac{2 \times a_u^{(1)}}{30 \times 0.030} \times 40 \times (\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ) = 89.15 \times a_u^{(1)}$$



Usvajajući iz praktičnih razloga isti profil uzengija kao na delu uz oslonac B, sledi:

$$\text{pretp. } R\emptyset 10 (a_u^{(1)} = 0.785 \text{ cm}^2) \Rightarrow e_u \leq 89.15 \times 0.785 = 70.0 \text{ cm}$$

Kako je na dužini osiguranja propisano maksimalno rastojanje uzengija od 25 cm, logično je, međutim, usvojiti manji prečnik armature. Međutim, ovako veliko računski potrebno rastojanje uzengija upućuje da treba proveriti minimalni procenat armiranja uzengijama:

$$\mu_{uz} = \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times e_u} \geq 0.2\% \Rightarrow e_u \leq \frac{2 \times a_u^{(1)}}{30 \times 0.2 \times 10^{-2}} = 33.3 \times a_u^{(1)} < 89.15 \times a_u^{(1)}$$

U ovom slučaju merodavne su minimalne, a ne računski potrebne uzengije.

Nosivost uzengija se određuje iz izraza:

$$\tau_{u,u} = \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times e_u} \times \sigma_v \times (\cos \alpha + \sin \alpha \times \cot \theta) = \mu_{uz} \times \sigma_v \times (\cos \alpha + \sin \alpha \times \cot \theta)$$

Usvajajući uobičajene vrednosti uglova ($\alpha = 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$) izraz u zagradi postaje jednak jedinici. Kako procenat armiranja MORA biti barem 0.2% (član 94. Pravilnika BAB 87), to nosivost minimalno potrebnih uzengija na dužini osiguranja iznosi:

$$\tau_{u,u,MIN} = \mu_{uz,MIN} \times \sigma_v = 0.2\% \times \sigma_v = \begin{cases} 0.2\% \times 400 = 0.80 \text{ MPa} & \text{za RA 400 / 500} \\ 0.2\% \times 240 = 0.48 \text{ MPa} & \text{za GA 240 / 360} \end{cases}$$

Princip osiguranja uzengijama da je nosivost usvojenih uzengija $\tau_{u,u}$ barem jednaka maksimalnom redukovanom naponu τ_{Ru} na dužini osiguranja. Lako je zaključiti da, ukoliko je napon τ_{Ru} manji od napred sračunatih vrednosti (0.8 MPa za rebrastu, odnosno 0.48 MPa za glatku armaturu), MORAJU biti usvojene MINIMALNE uzengije.

$$UR\emptyset 10 (a_u^{(1)} = 0.785 \text{ cm}^2) \Rightarrow e_u \leq 33.3 \times 0.785 = 26.2 \text{ cm} > 25 \text{ cm} = e_{u,max.}$$

$$UR\emptyset 8 (a_u^{(1)} = 0.503 \text{ cm}^2) \Rightarrow e_u \leq 33.3 \times 0.503 = 16.8 \text{ cm}$$

usvojeno: **URØ8/15** (m=2) na dužini $\lambda_b = 3.0 \text{ m}$

$$\Delta A_a = \frac{180}{2 \times 40} (\cot 45^\circ - \cot 90^\circ) = 2.25 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **2RØ25** (9.82 cm²)¹

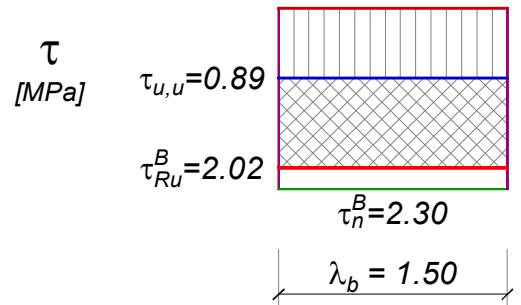
¹ Minimalno trećina armature iz polja, član 168. Pravilnika BAB 87

Osiguranje na delu uz oslonac B - varijanta

Na dužini osiguranja je potrebno postaviti barem minimalno propisane uzengije (član 94. BAB), što je u ovom slučaju **URØ8/15** (usvojeno na delu uz oslonac A). Napon koji mogu prihvatiti ove uzengije je:

$$\tau_{u,u} = \frac{2 \times 0.503}{30 \times 15} \times 40 \times (\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ)$$

$$\tau_{u,u} = 0.089 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0.89 \text{ MPa}$$



Deo napona smicanja koji prihvataju uzengije označen je vertikalnom šrafurom. Preostali deo napona τ_{Ru} , označen ukrštenom šrafurom, prihvata se koso povijenim profilima. To je deo armature iz polja (usvojeni profili **RØ25**), povijen pod uglom α_k . Deo dijagrama koji nije šrafiran (razlika τ_n i τ_{Ru}) predstavlja deo napona smicanja koji prihvata beton. Sledi:

$$H_{vu,k} = (0.202 - 0.089) \times 150 \times 30 = 508.4 \text{ kN}$$

$$\alpha_k = 45^\circ \Rightarrow A_{a,k} = \frac{H_{vu,k}}{\sigma_v \times (\cos \alpha_k + \sin \alpha_k \times \cot \theta)} = \frac{508.4}{40 \times (0.707 + 0.707 \times 1)} = 8.99 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **2RØ25** (9.82 cm²)

Kod proračuna dodatne zategnute armature u ovom slučaju potrebno je razdvojiti nosivost uzengija i betona ($\alpha = 90^\circ$) od nosivosti koso povijenih profila ($\alpha = 45^\circ$). Sledi:

$$T_{bu} = \frac{1}{2} \times (3 \times 0.095 - 0.230) \times 30 \times 52.2 = 43.2 \text{ kN}$$

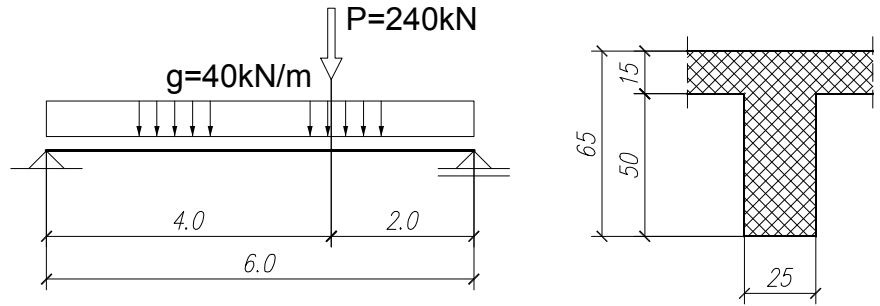
$$T_{u,u} = \tau_{u,u} \times b \times z = 0.089 \times 30 \times 52.2 = 139.9 \text{ kN}$$

$$\Delta A_a = \frac{43.2 + 139.9}{2 \times 40} (\cot 45^\circ - \cot 90^\circ) = 2.29 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **2RØ25** (9.82 cm²)

Primer 3

Dimenzionisati nosač sistema proste grede, čiji su opterećenje i poprečni presek prikazani na skici. MB 30, RA 400/500.



STATIČKI UTICAJI

a. stalno opterećenje

$$A_g = B_g = 40.0 \times 6.0 / 2 = 120 \text{ kN}$$

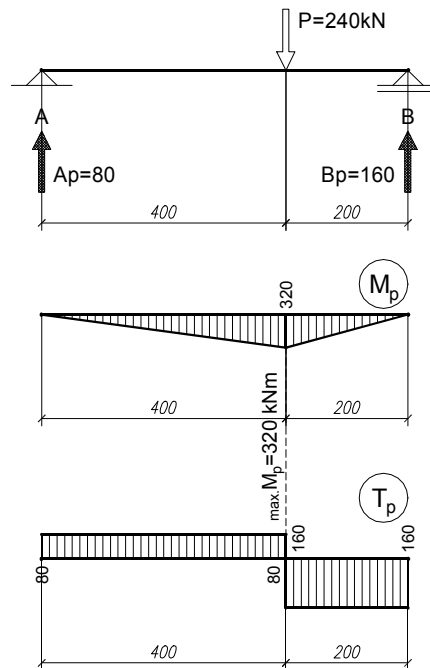
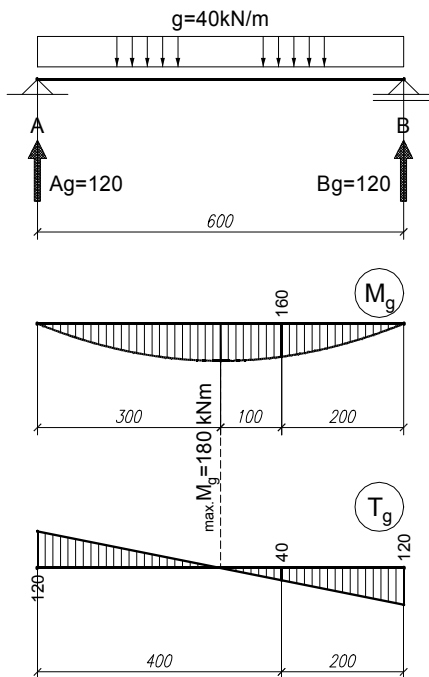
$$M_{g,max} = 40.0 \times 6.0^2 / 8 = 180 \text{ kNm}$$

b. povremeno opterećenje

$$A_p = 2.0 \times 240.0 / 6.0 = 80 \text{ kN}$$

$$B_p = 4.0 \times 240.0 / 6.0 = 160 \text{ kN}$$

$$M_{p,max} = 160 \times 2.0 = 320 \text{ kNm} \quad (x = 4.0 \text{ m})$$



DIMENZIONISANJE PREMA MOMENTIMA SAVIJANJA

$$MB 30 \Rightarrow f_B = 2.05 \text{ kN/cm}^2$$

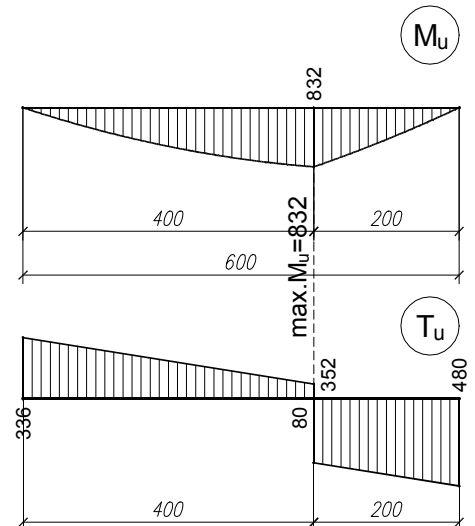
$$RA 400/500 \Rightarrow \sigma_v = 40 \text{ kN/cm}^2$$

Maksimalni moment savijanja M_u , merodavan za dimenzionisanje, je u preseku u kome je za odgovarajuću kombinaciju uticaja $T_u=0$. Sa dijagrama desno jasno je da je to presek na $x = 4.0 \text{ m}$ od oslonca A, gde je:

$$M_g = 80 \times 4.0 - 40 \times 4.0^2 / 2 = 160 \text{ kNm}$$

$$M_p = 80 \times 4.0 = 320 \text{ kNm} = M_{p,max}$$

$$M_u = 1.6 \times 160 + 1.8 \times 320 = 832 \text{ kNm}$$



Pritisnuta je gornja ivica nosača, pa je oblik pritisnute zone preseka ili pravougaoni, širine B , ili, za slučaj da je neutralna linija u rebru, oblika T . Pretpostavlja se da je neutralna linija u ploči:

$$B = \min. \left\{ \begin{array}{l} b + 20 \times d_p = 25 + 20 \times 15 = 325 \text{ cm} \\ b + 0.25 \times l_0 = 25 + 0.25 \times 600 = 175 \text{ cm} \end{array} \right\} = 175 \text{ cm}$$

pretp. $a_1 = 9 \text{ cm} \Rightarrow h = 65 - 9 = 56 \text{ cm}$

$$k = \frac{56}{\sqrt{\frac{832 \times 10^2}{175 \times 2.05}}} = 3.677$$

$\varepsilon_b/\varepsilon_a = 1.558/10\text{‰}$; $\bar{\mu} = 7.775\%$; $s = 0.135$

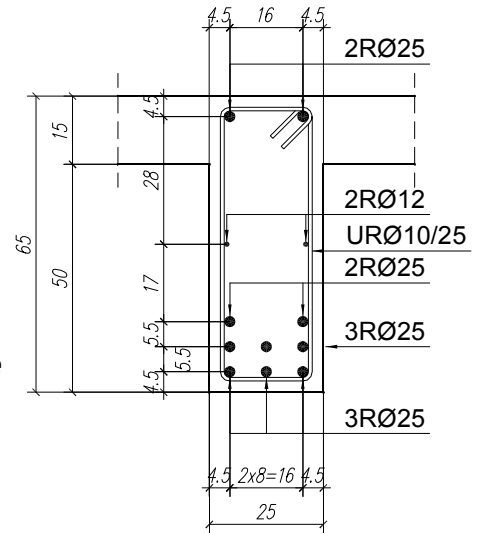
$x = s \times h = 0.135 \times 56 = 7.55 \text{ cm} < 15 \text{ cm} = d_p$

Pretpostavka o položaju neutralne linije je dobra, pa se potrebna površina zategnute armature određuje iz izraza:

$$A_{a, \text{potr.}} = 7.775 \times \frac{175 \times 56}{100} \times \frac{2.05}{40} = 39.05 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **8 RØ 25** (39.27 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times 4.5 + 3 \times 10 + 2 \times 15.5}{8} = 9.3 \text{ cm} \Rightarrow h_{\text{stv.}} = 65 - 9.3 = 55.7 \text{ cm} \approx 56 \text{ cm} = h_{\text{pretp.}}$$



DIMENZIONISANJE PREMA GLAVNIM NAPONIMA ZATEZANJA

MB 30 $\Rightarrow \tau_r = 1.1 \text{ MPa}$ (član 89. Pravilnika BAB 87)

Usvojeno je za sve preseke $z_b = 0.9 \times h = 0.9 \times 56 = 50.4 \text{ cm}$.

a. levi deo nosača (A-C)

$$T_u^A = 1.6 \times 120 + 1.8 \times 80 = 336 \text{ kN}$$

$$\tau_n^A = \frac{336}{25 \times 50.4} = 0.267 \text{ kN/cm}^2 > \tau_r$$

$$T_u^{C, \text{levo}} = 1.6 \times (-40) + 1.8 \times 80 = 80 \text{ kN}$$

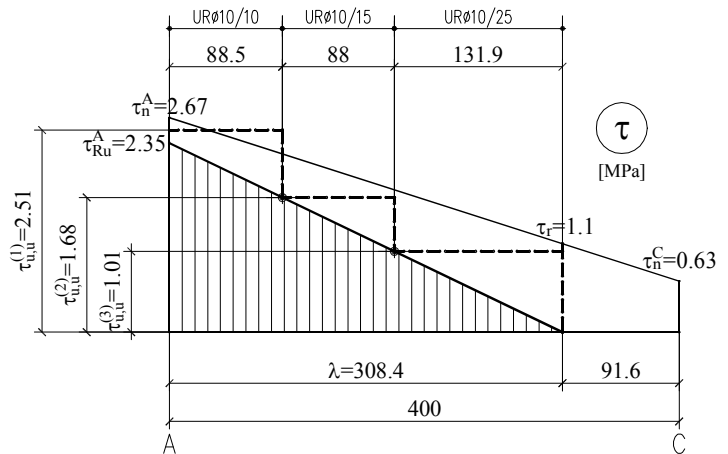
$$\tau_n^{C, \text{levo}} = \frac{80}{25 \times 50.4} = 0.063 \text{ kN/cm}^2 < \tau_r$$

$$\lambda_1 = L_{A-C} \times \frac{\tau_n^A - \tau_r}{\tau_n^A - \tau_n^{C, \text{levo}}}$$

$$\lambda_1 = 400 \times \frac{2.67 - 1.1}{2.67 - 0.63} = 308.4 \text{ cm}$$

Osiguranje se vrši vertikalnim uzengijama, a prema dijagramu τ_{Ru} .

$$\tau_n^A = 2.67 \text{ MPa} < 3\tau_r \Rightarrow \tau_{Ru}^A = \frac{3}{2} \times (2.67 - 1.1) = 2.35 \text{ MPa}$$



usvojeno: $m = 2$; $\theta = 45^\circ$; $\alpha = 90^\circ$; $UR\emptyset 10$ ($a_u^{(1)} = 0.785 \text{ cm}^2$)

$$e_u = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 0.235} \times 40 \times (1 + 0 \times 1) = 13.62 \times a_u^{(1)} = 10.69 \text{ cm} \Rightarrow \text{usvojeno } e_u = 10 \text{ cm}$$

Odgovarajući napon koji nose ove uzengije je:

$$\tau_{u,u}^{(1)} = \frac{m \cdot a_u^{(1)}}{b \cdot e_u} \cdot \sigma_v \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \theta) = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 10} \times 40 \times (1 + 0 \times 1) = 0.251 \text{ kN/cm}^2 > \tau_{Ru,max.}$$

Više kao prikaz praktičnog postupka nego stvarne potrebe za uštedom armature, izvršeno je proređivanje uzengija na pojedinim delovima dužine osiguranja. Za usvojene uzengije $\emptyset 10$ maksimalno rastojanje, određeno iz zadovoljenja $\mu_{uz,min.} = 0.2\%$ je:

$$e_u \leq \frac{m \cdot a_u^{(1)}}{b \cdot \mu_{uz,min.}} = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 0.2 \times 10^{-2}} = 31.4 \text{ cm} ; \quad e_u \leq \min. \left\{ \begin{array}{l} b = 25 \text{ cm} \\ h/2 = 28 \text{ cm} \\ 25 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{usv. } e_u = 25 \text{ cm}$$

Odgovarajući napon koji nose ove uzengije je:

$$\tau_{u,u}^{(3)} = \frac{m \cdot a_u^{(1)}}{b \cdot e_u} \cdot \sigma_v \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \theta) = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 25} \times 40 \times (1 + 0 \times 1) = 0.101 \text{ kN/cm}^2$$

Deo na kome su potrebne uzengije gušće od minimalnih određuje se iz dijagrama τ_{Ru} :

$$x_3 = \lambda_1 \times \left(1 - \frac{\tau_{u,u}^{(3)}}{\tau_{Ru,max.}} \right) = 308.4 \times \left(1 - \frac{0.101}{0.235} \right) = 176.5 \text{ cm}$$

Dodatno proređivanje je učinjeno usvajanjem uzengija $UR\emptyset 10/15$:

$$\tau_{u,u}^{(2)} = \frac{m \cdot a_u^{(1)}}{b \cdot e_u} \cdot \sigma_v \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \theta) = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 15} \times 40 \times (1 + 0 \times 1) = 0.168 \text{ kN/cm}^2$$

Deo nosača na kome su potrebne uzengije gušće od ovih određuje se iz dijagrama τ_{Ru} :

$$x_2 = \lambda_1 \times \left(1 - \frac{\tau_{u,u}^{(2)}}{\tau_{Ru,max.}} \right) = 308.4 \times \left(1 - \frac{0.168}{0.235} \right) = 88.5 \text{ cm}$$

Konačno, usvojeno je:

usvojeno: **UR \emptyset 10/10** ($m=2$) na dužini 90 cm $> x_2$
UR \emptyset 10/15 ($m=2$) na dužini 90 cm $> x_3 - x_2$
UR \emptyset 10/25 ($m=2$) na ostalom delu dužine λ_1

dodatna zategnuta armatura:

$$\Delta A_a = \frac{T_{mu}}{2\sigma_v} \times (\cot \theta - \cot \alpha) = \frac{336}{2 \times 40} \times (1 - 0) = 4.20 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **3 R \emptyset 25** (14.73 cm^2)¹

¹ Usvojene su 3R \emptyset 25 kao MINIMALNO TREĆINA šipki iz polja koje se moraju prevesti preko slobodnog oslonca (član 168. Pravilnika BAB 87)

b. desni deo nosača (deo C-B)

$$T_u^B = 1.6 \times 120 + 1.8 \times 160 = 480 \text{ kN}$$

$$\tau_n^B = \frac{480}{25 \times 50.4} = 0.381 \text{ kN/cm}^2 > \tau_r$$

$$T_u^{C, \text{desno}} = 1.6 \times 40 + 1.8 \times 160 = 352 \text{ kN}$$

$$\tau_n^{C, \text{desno}} = \frac{352}{25 \times 50.4} = 0.279 \text{ kN/cm}^2 > \tau_r$$

Kako je na čitavom delu nosača prekoračena vrednost τ_r , to je dužina osiguranja $\lambda_2 = 2.0 \text{ m}$. Osiguranje se vrši vertikalnim uzengijama i koso povijenim profilima, a prema dijagramu τ_{Ru} .

$$\tau_n^B > 3\tau_r \Rightarrow T_{bu}^B = 0 \Rightarrow \tau_{Ru}^B = \tau_n^B = 0.381 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Napon } 3\tau_r \text{ je prekoračen na delu nosača dužine } \lambda_3 = 200 \times \frac{3.81 - 3.3}{3.81 - 2.79} = 100.3 \text{ cm}$$

$$\tau_n^{C, \text{desno}} < 3\tau_r \Rightarrow \tau_{Ru}^{C, \text{desno}} = \frac{3}{2} \times (0.279 - 0.11) = 0.254 \text{ kN/cm}^2$$

Usvojene su na čitavoj dužini osiguranja vertikalne uzengije **URØ10/15**:

$$\tau_{u,u} = \frac{m \times a_u^{(1)}}{b \times e_u} \times \sigma_v \times (\cos \alpha + \sin \alpha \times \text{ctg} \theta) = \frac{2 \times 0.785}{25 \times 15} \times 40 \times (1 + 0 \times 1) = 0.168 \text{ kN/cm}^2$$

Na dijagramu τ_{Ru} u prilogu je deo napona koji prihvataju uzengije šrafiran vertikalnom, a deo koji je potrebno prihvatiti koso povijenim profilima ukrštenom šrafurom. Sledi:

$$H_{vu,k} = \left[\left(\frac{0.381 + 0.33}{2} \times 100.3 + \frac{0.33 + 0.254}{2} \times 99.7 \right) - 0.168 \times 200 \right] \times 25 = 781.5 \text{ kN}$$

usvojeno: $\theta = 45^\circ$; $\alpha_k = 45^\circ$ (ugao pod kojim se povijaju profili)

$$A_{a,k} = \frac{H_{vu,k}}{\sigma_v \times (\cos \alpha_k + \sin \alpha_k \times \cot \theta)} = \frac{781.5}{40 \times (0.707 + 0.707 \times 1.0)} = 13.81 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **3 RØ 25** (14.73 cm²)

Tačna mesta povijanja kosih profila određuju se grafički, konstrukcijom integralne krive.

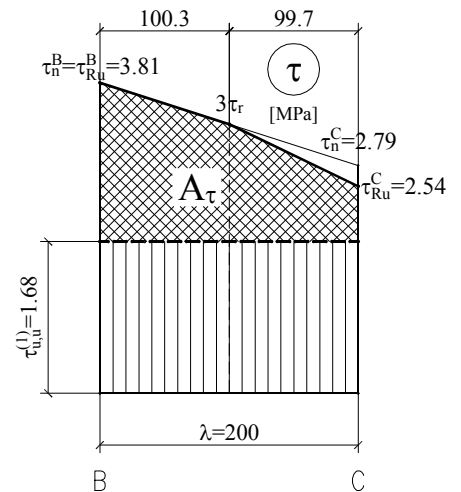
dodatna zategnuta armatura:

$$T_{u,u} = \tau_{u,u} \times b \times z = 0.168 \times 25 \times 50.4 = 211.1 \text{ kN}$$

$$T_{mu}^{red.} = T_{u,u} + T_{bu} = 211.1 + 0 = 211.1 \text{ kN}$$

$$\Delta A_a = \frac{T_{mu}^{red.}}{2\sigma_v} \times (\cot \theta - \cot \alpha) = \frac{211.1}{2 \times 40} \times (1 - 0) = 2.64 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **3 RØ 25** (14.73 cm²)²



² Videti napomenu za deo A-B (član 168. Pravilnika BAB 87)